Système de Représentation Simpliciale des Connaissances et Application au Raisonnement par Analogie

Erika Valencia et Jean-Paul Sansonnet

LIMSI Bt 508; Université Paris-Sud;
F-91403 Orsay Cedex.
{erika, jps}@limsi.fr

Résumé

Nous présentons ici le formalisme simplicial de représentation des connaissances déjà introduit dans [14], en détaillant ses propriétés en tant que formalisme de représentation spatiale des connaissances. Ce formalisme est basé sur la Q-Analyse introduite par Atkin dans [1], elle mme reposant sur le concept central de complexe simplicial issu de la topologie algébrique. Nous appliquons ensuite ce formalisme a un cas simple de résolution d'analogies. La source et la cible sont représentées à l'aide de simplexes, et la résolution de l'analogie est ramenée à la déformation du premier simplexe en le deuxième le long d'une chane polygonale dans un espace représentant les connaissances du du système et selon certaines contraintes.

Mots clés : Topologie algébrique, Représentation spatiale des connaissances, Naturalité, Expressivité, Granularité, Raisonnement par analogie.

1 Introduction

La topologie algébrique est un cadre théorique permettant de formaliser des relations spatiales discrètes. Cette théorie mathématique peut alors nous fournir une base solide pour la construction d'un modèle de représentation des connaissances. De plus, nous verrons qu'une approche algébrique permet une description constructive menant à une réalisation informatique.

Nous proposons un formalisme de représentation des connaissances basé sur une structure topologique : le complexe simplicial. Nous discutons des propriétés de ce formalisme en tant que système de représentation des connaissances. Puis nous proposons un modèle simplicial pour le raisonnement par analogie. Ce modèle se concrétise par le développement du système ESQIMO qui résoud des analogies simples dans des tests de QI.

2 Présentation du formalisme simplicial

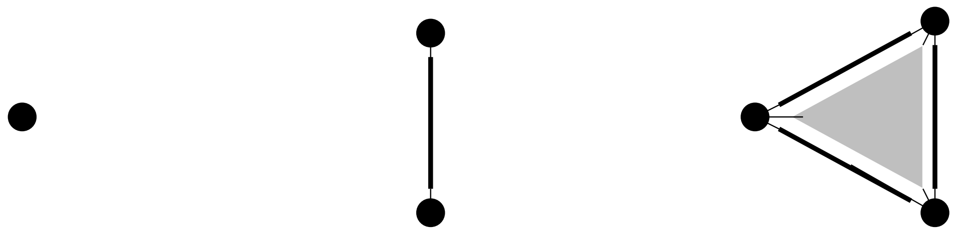
Les complexes simpliciaux, de même que les graphes, permettent de représenter des connaissances. Ils se focalisent en particulier sur la structure, les connexions, les cheminements possibles d'un ensemble complexe comprenant un grand nombre de situations, en exprimant des relations, des dépendances entre les éléments.

Définition 1
Un complexe simplicial abstrait est un couple (V, C) où V est un ensemble de sommets et C un ensemble de parties finies de V telles que si $s \in C$ alors toutes les parties $s' \in s$ appartiennent aussi à C. Les éléments de C sont des simplexes abstraits, la dimension d'un simplexe est le nombre de sommets moins un, la dimension du complexe C est celle du plus grand simplexe qu'il contient.

Un simplexe peut tre vu comme un polyèdre prenant appui sur des sommets. La figure 1 montre un simplexe de dimension 0, réduit à un point, et des simplexes de dimensions 1, 2.

Un 0-simplexe d'unique élément a_1, se note $\langle a_1 \rangle$, un 1-simplexe de sommets a_1 et a_2, se note $\langle a_1, a_2 \rangle$, et ainsi de suite. Dans un complexe, deux simplexes peuvent se toucher, ils partagent alors une *face*. Nous notons donc que la notion de complexe abstrait généralise la notion de graphe. En effet, tous les complexes de dimensions $n < 2$, sont des *graphes*.

Enfin, précisons que les complexes simpliciaux ne sont pas inconnus en informatique : ils sont utilisés par exemple pour la construction de volumes 3D et ont été proposés pour la formalisation des algèbres de processus et la représentation de contraintes spatio-temporelles.



(a) 0-simplexe

(b) Les deux extrémités du 1-simplexe, sont des 0-simplexes

(c) Le 2-simplexe contient les 0-simplexes et 1-simplexes sur lesquels il s'appuie

FIG. 1 – *Réalisation géométrique de n-simplexes* $n = 0, 1, 2$.

2.1 Représenter des relations binaires

Atkin a proposé en 1977, une technique permettant de représenter des relations binaires à l'aide de complexes simpliciaux [1]. Ce type de représentation, ainsi que son analyse est appelé la *Q-Analyse*. Elle a déjà été utilisée pour modéliser les interactions entre agents [2], les relations sociales [1, 2] et les positions aux échecs [1], par exemple. Voici comment les relations binaires sont représentées.

Considérons la relation binaire λ de l'ensemble $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dans l'ensemble $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, décrite par sa matrice d'incidence (table 1). Lorsqu'un élément a_i de A est λ-relié à un élément b_j de B, la case correspondante contient un 1, sinon elle contient un 0. Dans cette relation, nous n'admettons que des valeurs binaires, ici 0/1, mais aussi *Vrai/Faux*, etc... Il est possible d'adapter la technique qui va suivre pour la représentation de matrices à plusieurs valeurs [2], par le biais de seuils par exemple, mais nous n'utiliserons pas cette extension dans nos travaux pour l'instant.

Représentons maintenant les éléments a_i de A comme des sommets dans un espace, ils sont tous distincts. Chaque élément b_j de B peut alors tre représenté à partir des sommets auxquels il est λ-relié. Par exemple, l'élément b_1 est seulement relié à a_1, nous dessinerons alors b_1 comme un simplexe reposant uniquement sur le sommet a_1 (lui-mme un simplexe de dimension 0). Ainsi, b_1 et a_1 sont des 0-simplexes[1], confondus. Ensuite, b_2 est λ-relié à a_2 et a_3, il sera alors représenté comme un 1-simplexe reposant sur les deux 0-simplexes a_2 et a_3, et les contenant[2]. Enfin, b_3 est λ-relié à tous les éléments de A. Il sera représenté comme un 2-simplexe (trois sommets moins 1, donne une dimension 2) reposant sur les trois sommets a_1, a_2, a_3. Un 2-simplexe est ici une face triangulaire (comme montré sur la figure 1). Tous ces simplexes sont représentés sur la figure 2.1.

Nous pouvons également considérer la représentation duale (figure 2.1) dans laquelle ce sont les éléments de B qui sont les sommets. Cette représentation duale permet de mettre en valeur d'autres structures dans l'organisation des connaissances représentées. Toujours d'après la matrice d'incidence de la table 1, nous pouvons représenter a_1 comme un 1-simplexe reposant et contenant les 0-simplexes b_1 et b_3, a_2 comme un 1-simplexe reposant et contenant b_2 et b_3, et a_3 possède la mme représentation que a_2.

2.2 Représenter des ensembles de prédicats

Nous avons étendu cette technique de représentation introduite par Atkin, afin de permettre la représentation d'ensembles de prédicats. Considérons l'ensemble $P = \{p_1, ..., p_n\}$ de n prédicats et l'ensemble A d'objets. Il est possible de représenter la valeur de ces prédicats sur l'ensemble des objets par un complexe en considérant la relation binaire $\mu \in A \times P$ telle que l'élément de matrice $\mu(a_i, p_j) = 1$ si le prédicat p_j est vrai pour a_i.

Prenons par exemple :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$P = \{\text{pair, impair, premier, multiple de 3}\}$$

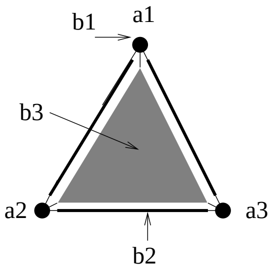
la matrice d'incidence de μ est alors celle de la figure 3 et la représentation simpliciale en prenant les prédicats comme sommets est donnée par la figure 3b. Les nombres $4, 8, 10$ sont représentés comme équivalents car aucun prédicat ne permet de les discerner.

En effet, avec une représentation simpliciale, deux éléments ayant les mmes propriétés (selon les prédicats de l'ensemble P) sont représentés comme équivalents. De mme, deux prédicats ne sont représentés comme différents que s'il existe un objet du monde (de l'en-

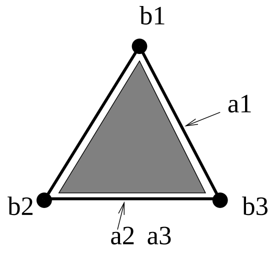
1. La dimension d'un simplexe, rappelons le est le nombre de ses sommets moins 1, ici il y a un seul sommet.
2. Attention, le simplexes contient ses bords.

λ	a_1	a_2	a_3
b_1	1	0	0
b_2	0	1	1
b_3	1	1	1

TAB. 1 – *Matrice d'incidence associée à λ.*



(a) Représentation de λ en prenant a_i comme sommets et b_i comme simplexes. b_1 est réduit à a_1, b_2 est le simplexe $\langle a_2, a_3 \rangle$,etc.



(b) Représentation duale de λ en prenant a_i comme sommets et b_i comme simplexes

FIG. 2 – *Représentations simpliciales de λ.*

semble A) sur lequel leurs valeurs diffèrent. Cette propriété est *l'égalité des indiscernables.*

2.3 Parties connectées d'un complexe

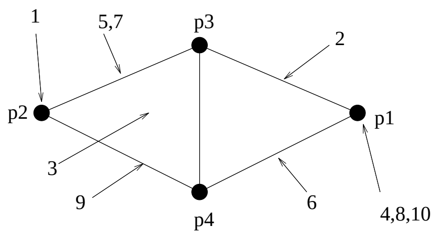
Un complexe simplicial est un ensemble de simplexes dont les intersections sont des simplexes. Mais tous les simplexes ne sont pas obligatoirement connectés entre eux[3]. Ceux qui sont connectés partagent des simplexes de dimensions variables, ils seront donc plus ou moins "fortement" connectés. De plus, deux simplexes donnés ne sont pas forcément immédiatement en contact entre eux, mais il se peut qu'ils soient en "contact" par l'intermédiaire d'autres simplexes. Ces intermédiaires peuvent tre plus ou moins nombreux. Ces descriptions intuitives sont formalisées à l'aide de la notion de chane polygonale.

3. C'est à dire qu'ils ne partagent pas tous une face.

Définition 2 (chane polygonale)
Une suite finie $\alpha = (s_0, ..., s_n)$ de simplexes d'un complexe K s'appelle chane polygonale d'origine s_0 et d'extrémité s_n si pour tout couple de simplexes consécutifs (s_i, s_{i+1}), $s_i \cap s_{i+1} \neq \emptyset$. La dimension de la

	p_1	p_2	p_3	p_4
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	0	1	1	0
6	1	0	0	1
7	0	1	1	0
8	1	0	0	0
9	0	1	0	1
10	1	0	0	0

(a) Matrice d'incidence de μ



(b) Complexe dual associé à μ

FIG. 3 – *Exemple de représentation simpliciale d'un ensemble de prédicats sur un ensemble d'objets.*

chane α est la dimension du plus petit des simplexes s_i plus un. Si $P_0 = P_n$, on dit que α est une chaîne polygonale fermée, elle définit un lacet sur $\mid K \mid$, de point-base P_0. Remarquons que les sommets d'une chaîne polygonale peuvent se retrouver plusieurs fois dans α.

L'étude de toutes les parties connectées d'un complexe simplicial (noté CS désormais) représentant une relation binaire, constitue le centre de la *Q-Analyse* [1].

Nous parlons en Q-analyse d'une *chaîne de q-connectivité*, avec q, le plus petit des entiers a_i. ainsi, un n-simplexe est n-connecté à lui-mme par une chaîne de longueur 0, et ne peut tre $(n+1)$-connecté à aucun simplexe. Pour chacun des simplexes d'un complexe K donné, nous pouvons distinguer deux valeurs particulières de q-connectivité :

- la valeur q_{min} la plus petite de connectivité du simplexe à un autre simplexe dans K ;
- la valeur q_{max} la plus grande, qui est bornée par la dimension du simplexe lui-mme.

A partir de la notion de q-connectivité, nous pouvons mesurer l'*excentricité* ϵ [1] :

$$\epsilon(\sigma_p) = \frac{q_{max}(\sigma_p) - q_{min}(\sigma_p)}{q_{min}(\sigma_p)}$$

Cette mesure est infinie lorsque σ_p est totalement déconnecté du reste du complexe.

Le fait de *lire* ces zones connectées entre elles par plus ou moins de longueur de chaîne, plus ou moins dimensionnée, a une correspondance en termes de représentation des connaissances, et va nous permettre de représenter des concepts de manière suffisamment naturelle, expressive et souple.

3 Application à l'analogie : Le système ESQIMO

Les opérations que nous venons d'énumérer dans la section précédente, nous permettent déjà de nous attaquer à la modélisation d'un type de raisonnement fondamental : le raisonnement par analogies. En effet, nous aurons besoin d'une comparaison entre des représentations ainsi que d'une transformation de représentations comme nous le verrons dans l'algorithme qui suit.

L'analogie intervient dans deux sens en sciences cognitives. J. Savelli [10] propose de les distinguer en l'*analogie statique* et l'*analogie dynamique*. L'analogie statique recouvre les tâche dans lesquelles il suffit de remarquer une analogie qui existe déjà entre deux situations, la mettre en valeur. Dans l'analogie dynamique, il s'agit de créer une situation d'analogie en trouvant (ou en sélectionnant parmi une base d'exemples) une situation source, la plus similaire possible. Cette situation source est ensuite supposée analogue à la situation cible (cette supposition reste toutefois à justifier). Dans le cadre de cette hypothèse d'analogie, il faut ensuite transférer les connaissances de la source vers la cible afin d'obtenir de nouvelles connaissances sur la cible, et résoudre ainsi un problème posé. En particulier, la grande différence entre ces deux types d'analogies, est qu'il n'y a pas besoin de base d'exemples dans l'analogie statique.

Le système ESQIMO [13, 12], que nous présentons ici est développé en `Caml`, et résoud automatiquement des tests de QI en construisant une représentation simpliciale du problème.

3.1 Représentation de l'espace du problème

Les tests sont exprimés avec 12 figures géométriques de base : (voir figure 4a):

$$E = \{e_1, ..., e_{12}\}$$

qui sont décrites à l'aide de sept propriétés tirées de l'étude de Weber [15] :

$$P = \{p_1, ..., p_7\} = \{\text{rond, carré, triangle, blanc, noir, petit, grand}\}$$

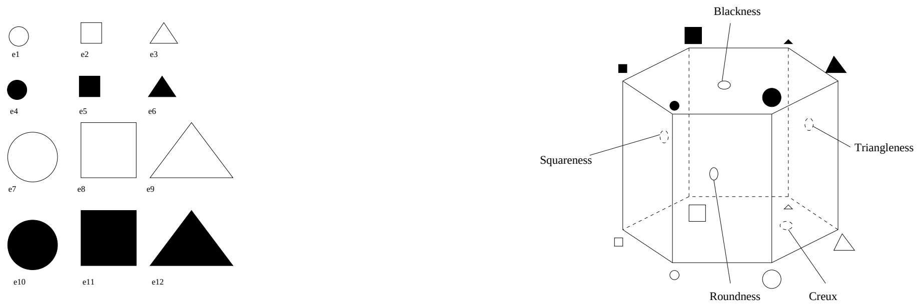
Chaque test consiste en la donnée de *trois figures* composées de un ou plusieurs *éléments* de E. Chacun des éléments de ces figures est perçu comme un vecteur d'états des détecteurs et ensuite représenté comme un simplexe d'après le modèle de construction précédent. Pour cela, nous considérons la relation binaire ν qui existe entre l'ensemble E et l'ensemble P. La matrice de ν sera telle que l'élément $(e_i, p_j) = 1$ si la propriété p_j est vraie pour e_i. Dans le cas de figures composées de plusieurs éléments, leur représentation sera un *multi-ensemble* de simplexes.

Afin de résoudre l'analogie, nous représentons l'espace des transformations et figures possibles par un complexe. En effet, nous considérons la mme relation μ mais cette fois sur tous les éléments connus de l'univers, et nous obtenons une grande matrice, dont chaque ligne est représentée par un simplexe, et qui est toute entière représentée par un complexe $C(\Omega)$ (voir figure 4b). Chaque élément des figures du test peut alors tre placé sur $C(\Omega)$.

3.2 Algorithme de ESQIMO

On décompose habituellement la résolution de cette analogie en quatre étapes :

- Première étape : déterminer la(les) relation(s) possible(s) entre A et B : R_{AB}.
- Deuxième étape : déterminer la(les) relation(s) possible(s) entre A et C : R_{AC}.
- Troisième étape : appliquer R_{AB} à C en se restreignant au domaine déterminé grce à R_{AC}.



(a) Éléments de l'univers de ESQIMO, appelés de haut en bas et de gauche à droite, e_1 à e_{12}.

(b) Vue 2D de $C(\Omega)$.

FIG. 4 – *Éléments manipulés par ESQIMO et leur représentation simpliciale.*

– Quatrième étape : vérifier la correspondance entre B et D par la relation R_{AC}.

3.2.1 Cas des figures simples

Nous plaçons les simplexes S_A de A et S_B de B sur le complexe $C(\Omega)$. L'étape 1 de résolution de l'analogie revient alors à trouver une relation entre S_A et S_B, c'est-à-dire un moyen de passer de l'un à l'autre : *nous modélisons cette transformation par une chane polygonale* de S_A à S_B dans $C(\Omega)$.

Cette chane peut ne pas exister, s'il n'existe pas de moyen de passer d'un sommet de S_A à un sommet de S_B en passant par des artes de $C(\Omega)$. Pour déterminer cela, il faut étudier les q-connexions des complexes de S_A et de S_B.

Chaque pas élémentaire de la chane correspond à une transformation élémentaire; la chane complète représente la composition de ces transformations élémentaires, donc la transformation globale. Le long d'une telle chane, chaque face partagée par deux simplexes consécutifs représente ce qui est resté invariant dans la transformation à cette étape. Ainsi, nous pouvons envisager la notion de *meilleur* chemin, correspondant à la notion de *meilleure* transformation, dans le sens, transformation la plus naturelle cognitivement. Nous avons remarqué que de telles transformations étaient en général celles qui conservent le plus de propriétés invariantes (mme et surtout lors des transformations élémentaires, c'est-à-dire que l'on ne change pas une propriété de noir en blanc à une étape pour la rechanger en noir à létape suivante). De plus les transformations correspondant à de plus courts chemins sont sélectionnées par notre système (moins détapes sont nécessaires pour les appliquer et surtout pour les déterminer).

L'étape 2, consiste à trouver le domaine de S_C à déformer le long du précédent chemin pour obtenir S_D. En effet, l'application de la transformation T_{AB} à C est modélisée par la déformation de S_C le long du chemin $S_A o ... o S_B$, ce qui constitue la troisième étape. Le simplexe S_D est alors la représentation simpliciale de D. La quatrième étape est optionnelle.

3.2.2 Cas des figures composées

Dans le cas de figures composées de plusieurs éléments, elles sont représentées par des listes de simplexes. Nous procédons alors dans un premier temps à un appariement de simplexes entre les deux figures, avec 4 heuristiques possibles. Ces heuristiques tiennent compte de différents modes d'appariement observés lors de tests empiriques effectués par nous-mmes. Ces tests nous ont été dne grande utilité pour la programmation des heuristiques d'appariement mais aussi des heuristiques de recherche de chanes polygonales. Pour chaque appariement, nous plaçons un simplexe de A avec un simplexe de B à la fois sur $C(\Omega)$ et nous cherchons des transformations élémentaires, c'est-à-dire des chemins de déformation à appliquer en parallèle (pour plus de détails voir le manuel de ESQIMO [12]).

3.2.3 Exemple rapide de résolution avec ESQIMO

Nous avons procédé à deux séries de tests empiriques sur 10 puis 20 sujets (pour le protocole et les analyses de résultats, voir [11]) afin d'étudier les différentes transformations possibles utilisées par les humains. Cela nous a permis de développer plusieurs heuristiques dans l'algorithme général d'ESQIMO, puis de tester les résultats de résolutions avec ESQIMO.

Dans le premier exemple, nous présentons les figures A, B et C de l'illustration 5, et nous attendons la réponse D correspondant au résultat empirique le plus fréquent.

Nous définissons les trois figures sur l'interface d'ESQIMO, avec la figure A ne contenant que l'élément e_1 et ainsi de suite :

```
#let A = e1 and B = e4 and C = e2;;
```

(a) (b) (c) (d)

FIG. 5 – *Les figures A, B and C sont définies, et nous nous attendons à la réponse D.*

Nous demandons le nom de l'élément solution, lors d'une résolution simple, dans l'univers `omega` (désignant $C(\Omega)$), avec les figures A, B, C définies précédemment [4] :

```
#nom_de(elements(resoud_simple omega A B C));; - :
```

La réponse est bien e_5, qui désigne un petit carré noir (voir 4) comme attendu sur la figure 5.

Pour d'autres exemples voir [13, 12].

Différents modèles ont déjà été proposés pour la résolution d'analogies comme SME [4, 5], ANALOGY [3, 6], ARCS [8]. Notre principal apport dans ce domaine réside dans l'exploration d'une résolution de type diagrammatique et surtout dans la proposition d'un nouveau système de représentation des connaissances basé sur la topologie algébrique. Les résultats fournis par ESQIMO sont satisfaisants par rapport aux quelques données empiriques déjà mentionnées dans [11] et surtout en considérant la simplicité du modèle. Nous travaillons sur la résolution d'analogies plus complexes et sur l'expression de propriétés *relatives* pour la description des figures des tests.

3.2.4 Efficacité

Du point de vue de l'efficacité, intéressons nous au coeur de l'algorithme de ESQIMO : la recherche du plus court chemin de dimension maximale entre deux simplexes plongés dans un CS.

Rechercher un chemin de connexité de dimension q entre deux simplexes revient à rechercher de proche en proche des simplexes voisins aux simplexes des extrémités. Cela revient à utiliser la matrice d'incidence de la relation $\lambda \subset A \times B$ et à rechercher les lignes qui ont en commun au moins q éléments 1 (ce qui nous ramène à nos mesures de similarité binaires). Pour faire cela, il suffit de calculer le produit ${}^tM.M - 1$ où M est la matrice d'incidence et ${}^tM$ sa transposée.

La matrice résultant indique le nombre déléments partagés par deux simplexes, seulement si ce nombre est positif. Si ce nombre est négatif, alors il n'y a pas d'éléments partagés.

Cela permet de trouver les classes d'équivalence de la relation "tre q-connecté", en fixant le seuil q voulu à la lecture. Ainsi on peut trouver les chemins de plus grande dimension reliant deux simplexes dans un complexe, c'est-à-dire dans une matrice.

Cette recherche est bornée à $\circ(p^3)$ où $p = max(Card(A), Card(B))$.

3.2.5 L'analogie dynamique : ESQIMO-BASE

Dans ce traitement de l'analogie, on considère une base d'exemples BASE de couples $A - B$, et on propose une cible $C-?$ à résoudre. Le raisonnement dont il s'agit alors est un raisonnement à base de cas. L'analogie intervient dans la phase de sélection d'un cas source à partir d'une certaine mesure de similarité, ainsi (et surtout) que dans la phase d'adaptation. L'algorithme d'ESQIMO devient alors :

- Recherche dans la base BASE d'un couple exemples $A - B$, grce à la mesure de similarité introduite précédemment. Si plusieurs sont sélectionnés, alors recherche en parallèle de plusieurs solutions.
- Algorithme *local* de résolution statique ESQIMO
- Stockage dans la base BASE du nouvel exemple $C - D$ où D est la solution proposée.

Dans le cycle de raisonnement à partir de cas présenté dans [9], les étapes déjà abordées par ESQIMO correspondent seulement à l'appariement et à l'adaptation. En effet, pour les autres étapes, de nouveaux problèmes sont posés, comme le stockage des couples dans la base BASE. Nous voulons les stocker eux aussi sous forme simpliciale par ce qu'ils ont de commun et de différent avec les autres couples. Ce stockage doit surtout remplir des conditions d'efficacité. Ainsi un couple n'est stocké que s'il apporte une information pertinente et supplémentaire à la base BASE. Ce nouvel aspect est en cours détude.

4 Conclusions

Le formalisme simplicial semble suffisamment riche pour prétendre supporter une représentation spatiale des connaissances. Nous l'avons choisi pour des raisons de naturalité et d'expressivité, et nous l'avons étudié pour tester ses autres propriétés. Il semble se comporter de façon prometteuse pour la représentation des hiérarchies, le traitement des exception, l'ajout de connaissances nouvelles, qui peuvent intervenir

4. Pour une explication sur l'utilisation des fonctions `resoud_simple`, `nom_de`. etc, voir le manuel [12]. ESQIMO se présente comme une bibliothèque de fonctions `Caml` que l'on appelle interactivement à la console.

dans des applications basées sur l'apprentissage ou la catégorisation.

En ce qui concerne le modèle de construction de représentations simpliciales, nous soulignons les propriétés communes entre le modèle de Holland [7] et les complexes simpliciaux qui nous permettent de construire des représentations qui nous semblent naturelles et adaptées à l'expression et à l'utilisation de relations spatiales.

ESQIMO n'est donc qu'un exemple d'application de certains outils de la topologie algébrique à des représentations construites dans le cadre de notre formalisme de représentation des connaissances. Nous développons actuellement ESQIMO-BASE qui permettra de se pencher sur des problèmes de reformulation des représentations. La reformulation est un aspect souvent critiqué des systèmes modélisant l'analogie, puisqu'ils sont coupables de donner les connaissances sous une forme pré-mchée à leur système, contenant déjà la solution. En sachant que toute la connaissance est obligatoirement dans la représentation à l'origine, et sans débattre sur cet aspect, notons que dans le cadre simplicial, une reformulation n'est pas un problème puisqu'il suffit de se servir des changements de base et de granularité pour adapter une représentation avant son traitement ultérieur.

Références

[1] R. H. Atkin. *Combinatorial Connectivities in Social Systems.* Verlag, 1977.

[2] J. L. Casti. *Complexification.* Harper Perennial, 1 edition, 1994.

[3] Thomas G. Evans. A program for the solution of a class of geometric analogy intelligence-test questions. In *Semantic Information Processing*, chapitre 5, pages 271–353. The MIT Press, 1968.

[4] Brian Falkenhainer, Kenneth D. Forbus et Dedre Gentner. The structure-mapping engine. *Artificial Intelligence*, 41(1):1–63, November 1989.

[5] Dedre Gentner. Structure-mapping a theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2):155–170, April-June 1983.

[6] J. P. Haton et al. *Le raisonnement en intelligence artificielle.* InterEditions, 1991.

[7] John H. Holland, Keith J. Holyoak, Richard E. Nisbett et Paul R. Thagard. *Induction – Processes of Inference, learning, and Discovery.* The MIT Press, 1986.

[8] K. J. Holyoak et P. Thagard. Analogical mapping by constraint satisfaction. *Cognitive Science*, 13(3):295–355, July-september 1989.

[9] Alain Mille, Batrice Fuchs et Benoit Chiron. Raisonnement fond sur l'exprience en supervision industrielle. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 13:97–128, 1999.

[10] Joël Savelli. *Aspects statique et dynamique de la notion d'analogie : Relation d'analogie et processus analogique.* PhD thesis, ANRT Grenoble, 1993.

[11] Erika Valencia. Un modle topologique pour le raisonnement diagrammatique. Rapport pour le DEA Sciences Cognitives, LIMSI. See also `http://www.lri.fr/~erika/`, August 1997.

[12] Erika Valencia. Hitch hiker's guide to esqimo. RR 1173, LRI, ura 410 CNRS, Universit Paris-Sud, 91405 Orsay, France. See also `http://www.lri.fr/~erika/`, May 1998.

[13] Erika Valencia et Jean-Louis Giavitto. Algebraic topology for knowledge representation in analogy solving. In ECCAI, diteur, *European Conference on Artificial Intelligence (ECAI98)*, pages 88–92, Brighton, UK, 23–28 August 1998. Christian Rauscher.

[14] Erika Valencia et Jean-Louis Giavitto. Modeling diagrammatic reasoning tasks with a topological framework. In *TwD98 Workshop*, dic 1998.

[15] S. H. Weber et A. Stolcke. l_0 : A testbed for miniature language acquisition. *International Computer Science Institute*, 1990.