Formalisme simplicial pour la représentation spatiale des connaissances et application au raisonnement par analogie.

Erika Valencia, Jean-Paul Sansonnet
LIMSI; Université Paris-Sud.

16 mars 1999

Résumé

Nous proposons un formalisme de représentation des connaissances basé sur une structure topologique : le complexe simplicial. Nous discutons des propriétés de ce formalisme en tant que système de représentation des connaissances. Puis nous proposons un modèle simplicial pour le raisonnement par analogie. Ce modèle se concrétise par le développement du système ESQIMO qui résoud des analogies simples dans des tests de QI.

Mots clés : Topologie algébrique, Représentation spatiale des connaissances, raisonnement par analogie.

1 Introduction

Les *concepts spatiaux* et *structures spatiales* peuvent être utiles pour représenter des connaissances qui ne sont pas nécessairement spatiales. En effet, il existe une *analogie* de structure entre l'espace concret [1] et d'autres domaines, puisque notre interaction avec l'espace concret est la base de notre expérience et donc de notre connaissance [HE97]. Par exemple, Habel [HE97] met l'accent sur la structure d'*ordre* commune à l'espace et au temps et qui se traduit entre autres par l'utilisation du même mot "entre" [2] pour parler d'un objet "entre" deux autres *spatialement*, mais également d'un instant compris "entre" deux autres *temporellement*.

En Intelligence Artificielle, les concepts spatiaux issus de l'expérience du monde physique sont la base pour construire des *formalismes* de *représentation des connaissances*. Nous pouvons ainsi raisonner dans plusieurs domaines en modelant des structures spatiales qui restent à définir. Nous nous pencherons ici sur l'étude particulière d'un outil pour la représentation spatiale de connaissances, basé sur la *topologie algébrique*.

En effet, les relation spatiales se di-

1. L'espace concret désigne ici le résultat de notre expérience physique.
2. en anglais "between".

visent en trois catégories : les concepts topologiques, les concepts métriques, les concepts de relations d'ordre. Nous nous intéressons ici à une utilisation des concepts topologiques uniquement et nous aborderons ensuite les aspects liés au concept de relation d'ordre.

L'évaluation d'un système de représentation des connaissances se fait selon 4 critères essentiellement [Lug98] :

- Abstraction : la représentation ne doit contenir que des informations pertinentes pour que le pouvoir d'abstraction est satisfaisant.
- Expressivité : toute la connaissance nécessaire doit être exprimable dans la représentation.
- Naturalité : l'expression de la connaissance nécessaire doit se faire de manière naturelle[3], les propriétés nécessaires doivent être accessibles (visibles, calculables) facilement.
- Efficacité : l'exécution du programme résultant se fait de manière efficace (surtout en termes de temps pour une plausibilité cognitive)

Nous attachons une grande importance aux critères de naturalité et d'expressivité (qui sont liés). Pour cette raison, et puisque nous nous intéressons aux concepts topologiques nous allons étudier la possibilité d'élaborer un formalisme pour la représentation spatiale (et topologique) des connaissances basé lui-même sur la topologie [GV98]. Pour satisfaire au critère d'efficacité nous devons utiliser une branche constructiviste de la topologie (du point de vue d'un informaticien), nous choisissons donc la topologie algébrique. De plus, des formalismes ayant déjà prouvé leur fort pouvoir d'abstraction, tels que les graphes conceptuels sont basé sur les graphes, qui sont un cas particulier de complexes simpliciaux, notion élémentaire de la topologie algébrique.

3. Par exemple par une correspondance naturelle, dite *analogique* entre le matériel représenté et la représentation, voir Johnson-Laird et les modèles mentaux [JL92].

2 Les représentations simpliciales

Nous commençons par présenter la structure de base que nous utilisons dans ce formalisme : le complexe simplicial.

2.1 Les complexes simpliciaux

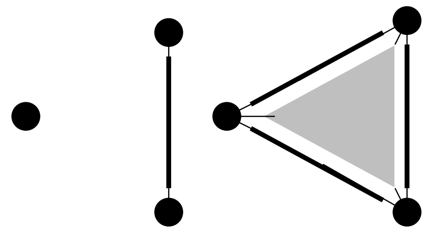
On appelle k-cellule, un morceau d'espace « abstrait » de dimension k et qui ne contient aucun trou. Ces cellules sont des briques de base pour la construction d'un espace C moyennant les conditions :

- le bord d'une cellule est constitué d'une union finie de cellules de C ;
- l'intersection de deux cellules de C est soit vide, soit une autre cellule de C.

On dit alors que C est un *complexe cellulaire*. La structure abstraite correspondante est celle de *complexe simplicial* :

Definition 1 *Un complexe simplicial abstrait est un couple* (V, C) *où* V *est un ensemble de sommets et* C *un ensemble de parties finies de* V *telles que* *si $s \in C$ alors toutes les parties $s' \in s$ appartiennent aussi à C. Les éléments de C sont des simplexes abstraits, la dimension d'un simplexe est le nombre de sommets moins un, la dimension du complexe C est celle du plus grand simplexe qu'il contient.*

Un simplexe peut être vu comme un polyèdre prenant appui sur des sommets. La figure 1 montre un simplexe de dimension 0, réduit à un point, et des simplexes de dimensions 1, 2.



(a) 0-simplexe (b) 1-simplexe (c) 2-simplexe

FIG. 1 - *Réalisation géométrique de n-simplexes $n = 0, 1, 2$.*

Un 0-simplexe d'unique élément a_1, se note $\langle a_1 \rangle$, un 1-simplexe de sommets a_1 et a_2, se note $\langle a_1, a_2 \rangle$, et ainsi de suite. Dans un complexe, deux simplexes peuvent se toucher, ils partagent alors une *face*. Nous notons donc que la notion de complexe abstrait généralise la notion de graphe. En effet, tous les complexes de dimensions $n < 2$, sont des *graphes*.

Definition 2 (Graphe) *Le couple $G = (S, A)$, est un* graphe*, dont l'ensemble des sommets est S, et l'ensemble des arêtes est $A \subseteq S \times S$.*

Ainsi, les sommets d'un graphe sont des simplexes de dimension 0 et les arrêtes des simplexes de dimension 1. De plus, les intersections entre arrêtes sont bien des simplexes, le graphe en entier est donc un complexe simplicial. La dimension de ce complexe est celle du plus grand simplexe qu'il contient c'est-à-dire 1 aussi.

2.2 Représenter des relations binaires

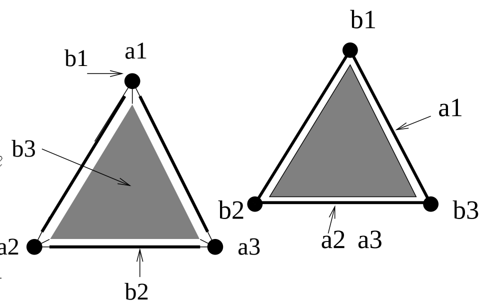
Atkin a proposé en 1977, une technique permettant de représenter des relations binaires à l'aide de complexes simpliciaux [Atk77]. Ce type de représentation, ainsi que son analyse est appelé la *Q-Analyse*. Elle a déjà été utilisée pour modéliser les interactions entre agents [Cas94], les relations sociales et les positions aux échecs, par exemple. Voici comment les relations binaires sont représentées.

Considérons la relation binaire λ de l'ensemble $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dans l'ensemble $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, décrite par sa matrice d'incidence (table 1). Lorsqu'un élément a_i de A est λ-relié à un élément b_j de B, la case correspondante contient un 1, sinon elle contient un 0. Dans cette relation, nous n'admettons que des valeurs binaires, ici 0/1, mais aussi *Vrai/Faux*, etc... Il est possible d'adapter la technique qui va suivre pour la représentation de matrices à plusieurs valeurs, par le biais de seuils par exemple, mais nous n'utiliserons pas cette extension dans nos travaux pour l'instant.

Représentons maintenant les éléments a_i de A comme des sommets dans un espace, ils sont tous distincts. Chaque élément b_j de B peut alors être repré-

λ	a_1	a_2	a_3
b_1	1	0	0
b_2	0	1	1
b_3	1	1	1

TAB. 1 - *Matrice d'incidence associée à λ.*



(a) Représentation de λ en prenant a_i comme sommets et b_i comme simplexes.

(b) Représentation duale de λ en prenant a_i comme sommets et b_i comme simplexes.

FIG. 2 - *Représentations simpliciales de λ.*

senté à partir des sommets auxquels il est λ-relié. Par exemple, l'élément b_1 est seulement relié à a_1, nous dessinerons alors b_1 comme un simplexe reposant uniquement sur le sommet a_1 (lui-même un simplexe de dimension 0). Ainsi, b_1 et a_1 sont des 0-simplexes [4], confondus. Ensuite, b_2 est λ-relié à a_2 et a_3, il sera alors représenté comme un 1-simplexe reposant sur les deux 0-simplexes a_2 et a_3, et les contenant [5]. Enfin, b_3 est λ-relié à tous les éléments de A. Il sera représenté comme un 2-simplexe (trois sommets moins 1, donne une dimension 2) reposant sur les trois sommets a_1, a_2, a_3. Un 2-simplexe est ici une face triangulaire (comme montré sur la figure 1). Tous ces simplexes sont représentés sur la figure 2(a).

Nous pouvons également considérer la représentation duale (figure 2(b)) dans laquelle ce sont les éléments de B qui sont les sommets. Cette représentation duale permet de mettre en valeur d'autres structures dans l'organisation des connaissances représentées. Toujours d'après la matrice d'incidence de la table 1, nous pouvons représenter a_1 comme un 1-simplexe reposant et contenant les 0-simplexes b_1 et b_3, a_2 comme un 1-simplexe reposant et contenant b_2 et b_3, et a_3 possède la même représentation que a_2.

Nous remarquons ici que a_2 et a_3 sont λ-reliés aux mêmes éléments de B, ils ne sont pas distinguables, ils jouent le même rôle. Cette information était *contenue* dans la représentation de la figure 2(a), mais elle n'y était pas mise en valeur. En effet, si nous regardons plus en détails cette première représentation, on peut déjà voir que a_2 et a_3 jouent un rôle symétrique. Ils sont tous les deux un sommet de b_2, et un sommet de b_3, et n'ont aucune autre relation qui les distingue. Mais il faut utiliser la représentation duale pour le mettre en évidence visuellement.

Prenons un exemple simple de relation λ pour illustrer notre propos. Consi-

4. La dimension d'un simplexe, rappelons le est le nombre de ses sommets moins 1, ici il y a un seul sommet.

5. Attention, le simplexes contient ses bords.

λ	tulipe	coquelicot	pensée	myosotis
rose	1	0	1	1
jaune	1	1	1	0
bleu	0	0	1	1
blanc	1	1	1	1

TAB. 2 - *Matrice Λ d'incidence de la relation $\lambda \subset F \times C$.*

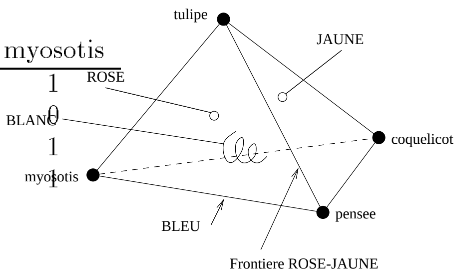


FIG. 3 - *Complexe associé à $\lambda \subset (Fleurs \times Couleurs)$. BLANC est un volume, JAUNE et ROSE sont des faces, BLEU est un trait.*

dérons l'ensemble F, de types de fleurs [Cas94] :

$$F = \{\text{tulipe}, \text{coquelicot}, \text{pensée}, \text{myosotis}\}$$

et l'ensemble C, de couleurs :

$$C = \{\text{rose}, \text{jaune}, \text{bleu}, \text{blanc}\}$$

Une relation intéressante entre ces deux ensembles serait λ telle que :

la fleur f_i est λ-reliée à la couleur c_j
ssi
il existe des fleurs du type de f_i ayant la couleur c_j sur terre.

dont la matrice d'incidence Λ est donnée par la table 2. Nous pouvons alors représenter les couleurs comme des complexes simpliciaux, chaque couleur étant définie par une ligne de la matrice Λ et constituant un simplexe. Le 2-simplexe représentant la couleur rose sera alors :

$$rose = \langle \text{tulipe}, \text{pensée}, \text{myosotis} \rangle$$

tandis que le 2-simplexe associé à jaune sera :

$$jaune = \langle \text{tulipe}, \text{pensée}, \text{coquelicot} \rangle$$

Notons le 1-simplexe associé à la *frontière* entre la couleur rose et la couleur jaune. On ne peut attribuer aucun nom de couleur à ce 1-simplexe, pourtant, *il ressort clairement de cette figure* et il est manipulable. Par contre, si l'on observe la table de la matrice Λ ci-dessus, les "1" définissant cette frontière existent, certes, mais ne sautent absolument pas aux yeux. Nous verrons comment cette remarque va nous permettre de parler de la représentation de concepts et de la découverte de concepts dans la section 3.3.

2.3 Représenter des ensembles de prédicats

Nous avons étendu cette technique de représentation introduite par Atkin, afin de permettre la représentation d'ensembles de prédicats. Considérons l'ensemble $P = \{p_1, ..., p_n\}$ de n prédicats et l'ensemble A d'objets. Il est possible de représenter la valeur de ces prédicats sur l'ensemble des objets par un complexe en considérant la relation binaire $\mu \in A \times P$ telle que l'élément de matrice $\mu(a_i, p_j) = 1$ si le prédicat p_j est vrai pour a_i.

Prenons par exemple :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$P = \{\text{pair, impair, premier, multiple de } 3\}$$

la matrice d'incidence de μ est alors celle de la figure 4 et la représentation simpliciale en prenant les prédicats comme sommets est donnée par la figure 4b. Les nombres $4, 8, 10$ sont représentés comme équivalents car aucun prédicat ne permet de les discerner.

En effet, avec une représentation simpliciale, deux éléments ayant les mêmes propriétés (selon les prédicats de l'ensemble P) sont représentés comme équivalents. De même, deux prédicats ne sont représentés comme différents que s'il existe un objet du monde (de l'ensemble A) sur lequel leurs valeurs diffèrent. Cette propriété est *l'égalité des indiscernables.*

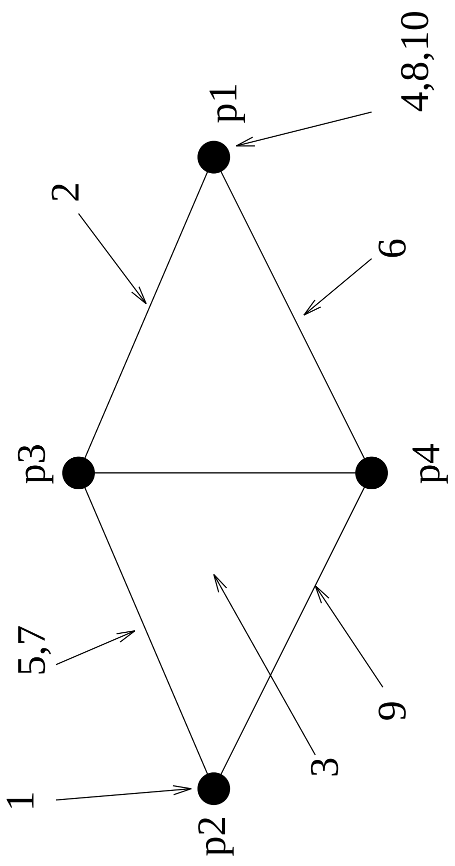
3 Propriétés des représentations simpliciales

3.1 Construction d'une représentation

Plusieurs auteurs ont étudié le passage entre l'« environnement » et la construction d'une représentation. Le morphisme reliant un modèle avec le monde représenté dépend du « processus même d'ordonancement du monde : la catégorisation » [GI92]. Il existe plusieurs approches de l'activité de catégorisation, Holland [HHNT86] propose un modèle basé sur des fonctions de catégorisation réalisant des classes d'équivalence sur les stimuli, cette proposition est illustrée par la figure 5.

	p_1	p_2	p_3	p_4
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	0	1	1	0
6	1	0	0	1
7	0	1	1	0
8	1	0	0	0
9	0	1	0	1
10	1	0	0	0

(a) Matrice d'incidence de μ



(b) Complexe dual associé à μ

FIG. 4 - *Exemple de représentation simpliciale d'un ensemble de prédicats sur un ensemble d'objets.*

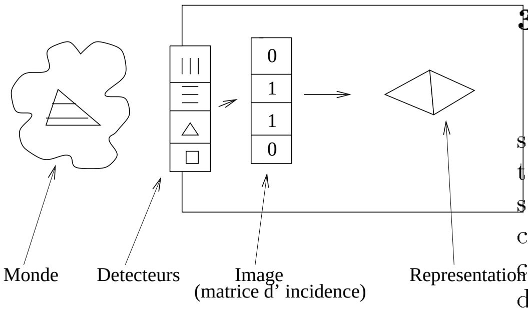


FIG. 5 - *Correspondance entre un état du monde et une représentation : les détecteurs s'allument selon les propriétés des objets observés.*

Dans ce modèle[VG98b], les détecteurs sont des prédicats pouvant prendre les valeurs 0 ou 1 selon que les objets à détecter allument le détecteur ou non. Ces détecteurs $d_1, ..., d_n$ codent les états du monde à l'aide d'une fonction de catégorisation C qui partitionne les états du système et divise le monde en classes d'équivalence [6]. La fonction C traite donc les objets qui ne sont pas discernables grâce à ces détecteurs comme équivalents : il y a *égalité des indiscernables.*

à l'issue de l'encodage de Holland, il est aisé d'extraire une représentation simpliciale. Considérons le vecteur d'états des détecteurs associé à la perception d'un objet, comme une ligne de la matrice décrivant la relation binaire qui existe entre les objets du monde et les détecteurs. Chaque objet est alors un simplexe, et un état du système, un complexe.

6. Un modèle basé sur une telle catégorisation met en correspondance plusieurs objets avec une représentation, c'est un homomorphisme [HHNT86].

3.2 Parties connectées d'un complexe simplicial

Un complexe simplicial est un ensemble de simplexes dont les intersections sont des simplexes. Mais tous les simplexes ne sont pas obligatoirement connectés entre eux [7]. Ceux qui sont connectés partagent des simplexes de dimensions variables, ils seront donc plus ou moins “fortement” connectés. De plus, deux simplexes donnés ne sont pas forcément immédiatement en contact entre eux, mais il se peut qu'ils soient en “contact” par l'intermédiaire d'autres simplexes. Ces intermédiaires peuvent être plus ou moins nombreux. Ces descriptions intuitives sont formalisées à l'aide de la notion de chemin polygonal.

Definition 3 (chemin polygonal) *Une suite finie $\alpha = (s_0, ..., s_n)$ de simplexes d'un complexe K s'appelle chemin polygonal d'origine s_0 et d'extrémité s_n si pour tout couple de simplexes consécutifs (s_i, s_{i+1}), $s_i \cap s_{i+1} \neq \emptyset$. La dimension du chemin α est la dimension du plus petit des simplexes s_i plus un. Si $P_0 = P_n$, on dit que α est une chaîne polygonale fermée, elle définit un lacet sur $\mid K \mid$, de point-base P_0. Remarquons que les sommets d'une chaîne polygonale peuvent se retrouver plusieurs fois dans α.*

L'étude de toutes les parties connectées d'un CS représentant une relation binaire, constitue le centre de la *Q-Analyse* [Atk77].

Considérons deux simplexes σ_1 et σ_2 d'un complexe simplicial K. Nous

7. C'est à dire qu'ils ne partagent pas tous une face.

venons de voir que σ_1 et σ_2 sont connectés par une chaîne, s'il existe une séquence finie de simplexes :

$$\{\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}, ..., \sigma_{a_n}\}$$

tels que :

(1) $\sigma_{a_1} \leq \sigma_1$
(2) $\sigma_{a_n} \leq \sigma_2$
(3) σ_{a_i} et $\sigma_{a_{i+1}}$ partagent une face.

Où $\leq$ représente la relation d'inclusion. Nous parlons en Q-Analyse d'une *chaîne de q-connectivité*, avec q, le plus petit des entiers a_i. ainsi, un n-simplexe est n-connecté à lui-même par une chaîne de longueur 0, et ne peut être $(n+1)$-connecté à aucun simplexe. Prenons un exemple concret et considérons les deux simplexes :

$$Y_1 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$$

et

$$Y_2 = \langle x_2, x_4, x_5 \rangle$$

Ces deux simplexes sont 1-connectés par le 1-simplexe $\langle x_2, x_4 \rangle$ (voir figure 6).

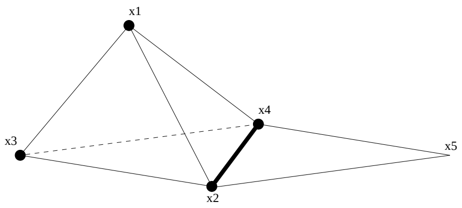


FIG. 6 - *Un 3-simplexe et un 2-simplexe, 1-connectés le long du 1-simplexe $\langle x_2, x_4 \rangle$. Le 3-simplexe $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, est en trois dimensions, l'arrête en pointillés est en arrière par rapport au plan du 2-simplexe, pour figurer l'idée de volume*

3.3 Représenter un concept

Reprenons l'exemple des fleurs donné plus haut, et regardons encore la frontière mise en valeur sur la figure 3. On pourrait l'interpréter, par exemple, comme le domaine commun d'extension du rose et du jaune parmi les fleurs de la nature. Dans cet exemple, cette frontière existe d'elle-même, et correspond à un concept que nous n'avions jamais eu besoin de nommer par ailleurs. Cependant, ce type de frontière peut tout aussi bien correspondre à une sous-catégorie qui a déjà reçu un nom, si nous en avions eu l'utilité.

Ce type de représentation nous permet une *auto-organisation* des objets en concepts à partir de leur propriétés. Les concepts ne possèdent alors plus de bords déterminés et *fixes*. Cette auto-organisation mène aussi à la *découverte* de concepts sous-jacents.

Les parties q-connectées d'un complexe sont les parties qui ont des bords en commun, ces bords peuvent être interprétés comme des frontières entre concepts dans une représentation simpliciale. Les concepts sont alors représentés par ce qu'ils ont de *commun* et de *différent* avec les autres.

Selon que nous considérons une représentation en fonction des propriétés ou bien la représentations duale en fonction des objets, nous allons pouvoir définir les concepts en *extension* ou en *intension*.

En effet, un concept est défini en *extension* si l'on énumère l'ensemble des *objets* qui sont des exemples connus représentant (ou inclus dans) ce concept. C'est ce qui est visible dans l'exemple fleurs lorsque l'on représente les fleurs comme des sommets et les propriétés de couleur comme des simplexes construits dessus. La propriété "jaune" est un simplexe contenant des *exemples* de "jaunesse".

Un concept est défini en *intension* si l'on donne les propriétés communes à tous ses membres. C'est ce qui est visible dans l'exemple des nombres lorsque les propriétés sont représentées comme des sommets et les nombres par dessus. Dans cet exemple, le simplexe $\langle 5, 7\rangle$ contient les simplexes $\langle p_2\rangle$ et $\langle p_3\rangle$, il existe un concept défini comme vérifiant ces deux propriétés (et contenant aussi le nombre 1 qui est *identifié* avec le simplexe $\langle p_2\rangle$).

3.4 Traitement des exceptions

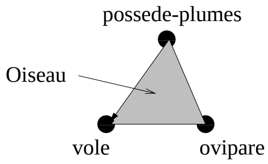
Le traitement des exception est un sujet qui pose souvent problème dans les systèmes de représentation des connaissances. En effet, soit on est obligé d'ignorer tout simplement cet aspect de la représentation des connaissances pour avoir une hiérarchie de classes rigoureuse, soit on est obligé de modifier la hiérarchie aux dépends de ses propriétés fondamentales d'héritage.

Ce problème vient souvent du fait qu'une classe est nécessairement nommée, étiquetée, et que ses héritiers sont des branches qui partent de cette étiquette [Bra85]. Nous avons vu ici, que les concepts sont définis au choix en intension (par les attributs partagés par les exemples connus) ou en extension (par les exemples connus), sans avoir explicitement recours à un étiquetage direct de chaque concept. En effet, un étiquetage pose toujours le problème de la granularité d'un système représentation des connaissances que nous aborderons dans la sous-section suivante.

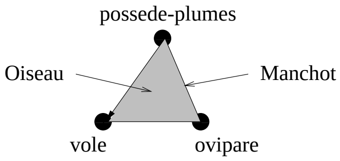
Dans notre formalisme, il est possible de décrire un élément en tant qu'*exception* par rapport à une classe, puisque nous le représentons par ce qu'il a des *différent* par rapport aux éléments définissant cette classe. Puisque les complexes sont une généralisation des graphes à plusieurs dimensions, nous pouvons tout naturellement représenter des hiérarchies de concepts à l'aide de complexes simpliciaux. La relation d'héritage des classes est alors la relation d'inclusion des complexes.

Par exemple, considérons la classe oiseau définie en intension par trois propriétés, "possède-plumes", "vole" et "ovipare". Cette classe est représentée sur la figure 7(a). Essayons de représenter l'exception "manchot" par rapport à cette classe. Il ne vérifie que les propriétés "possède-plumes" et "ovipare", il est donc représenté comme un 1-simplexe appartenant au simplexe "oiseau". Cela représente une sous-classe qui ne vérifie que ces deux caractères et dont la classe oiseau hérite (figure 7(b)). Cela aurait été impossible si "oiseau" était déjà une propriété atomique. Mais elle est heureusement elle-même, dans tous les cas, exprimable en fonction de propriétés plus fines (voir section 3.5).

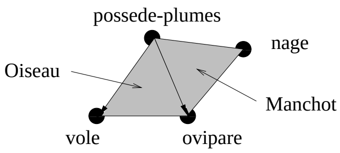
La représentation de l'exception sera différente de celle de tous les autres objets entrant dans la classe "oiseau". Cette différence peut même se traduire par une autre propriété en plus comme "nage" par exemple comme sur la figure 7(c). Ici l'objet "manchot" et les objets de "oiseau " partagent encore une sous-classe définie par les propriétés "oiseau" et "ovipare", mais cette sous-classe n'est pas celle à laquelle appartient "manchot". On peut alors dire qu'un manchot est une exception à la classe des oiseaux car il ne vole pas, ou



(a) La classe "oiseau" définie en intension par trois propriétés, "possède-plumes", "vole" et "ovipare".



(b) Représentation de l'exception "manchot" par rapport à cette classe.



(c) Représentation de l'exception "manchot" par rapport à la classe "oiseau", en considérant la propriété supplémentaire "nage".

FIG. 7 - *Insertion d'une exception dans une représentation en intension d'une classe.*

bien qu'un manchot est un oiseau qui ne vole pas *et* qui nage.

3.5 Abstraction et granularité

La granularité de départ d'une représentation est souvent difficile à doser. En effet, trop forte, elle posera des problèmes d'efficacité d'exécution. Notons que ces problèmes peuvent sembler sans importance pour certaines modélisations non appliquées, mais il faut tout de même ne pas dépasser une limite qui interdirait la plausibilité cognitive du modèle [8]. Tandis qu'une granularité trop faible posera à nouveau des problèmes d'expressivité du formalisme.

La granularité est pourtant aussi un problème initial dans notre formalisme, puisqu'il faut choisir la granularité pour les propriétés qui vont nous servir de *base* pour exprimer tous les objets rencontrés.

Dans un complexe, chacun des sommets peut être considéré comme étant lui-même représentable avec une granularité plus fine. En effet, cela correspond à la simple opération algébrique de changement de base. Si une granularité est jugée insuffisante à une étape de la construction de la représentation, on peut projeter toute la représentation des connaissances courante selon une nouvelles base, plus fine en exprimant les anciennes propriétés en fonction des nouvelles.

8. De plus en plus de modèles accordent de l'importance à l'aspect efficacité d'un modèle car il est lié au paramètre de temps de réponse mesurable par les psychologues. Un temps de réponse trop long suppose que le mode de résolution n'est pas le plus naturel possible. Pour rendre compte de l'adaptabilité aux problèmes et à la rapidité de résolution des systèmes cognitifs modélisés, il faut se contraindre à des modèles efficaces [VDK96]

4 Application à l'analogie : Le système ESQIMO

Le système ESQIMO [VGS98, VG98a], que nous présentons ici est développé en `Caml`, et résoud automatiquement des tests de QI en construisant une représentation simpliciale du problème.

4.1 Représentation de l'espace du problème

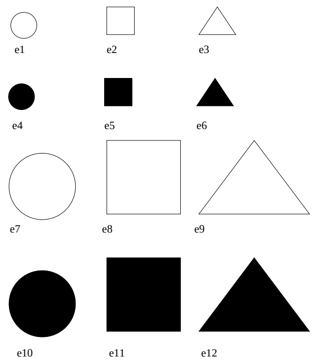
Les tests sont exprimés avec 12 figures géométriques de base : (voir figure 8a):

$$E = \{e_1, ..., e_{12}\}$$

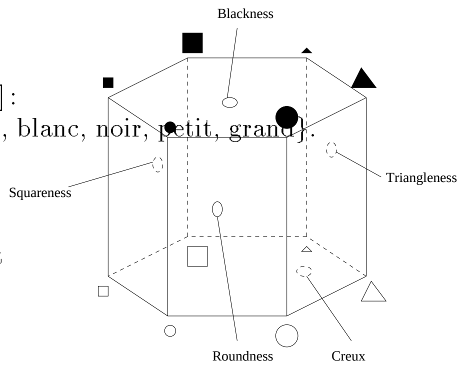
qui sont décrites à l'aide de sept propriétés tirées de l'étude de Weber [WS90] :
$P = \{p_1, ..., p_7\} = \{$rond, carré, triangle, blanc, noir, petit, grand$\}$.

Chaque test consiste en la donnée de *trois figures* composées de un ou plusieurs *éléments* de E. Les éléments observés sur chaque figure correspondent aux objets du monde dans le modèle de la figure 5, les prédicats correspondent aux détecteurs. Chacun des éléments de ces figures est donc perçu comme un vecteur d'états des détecteurs et ensuite représenté comme un simplexe d'après le modèle de construction précédent. Pour cela, nous considérons la relation binaire ν qui existe entre l'ensemble E et l'ensemble P. La matrice de ν sera telle que l'élément $(e_i, p_j) = 1$ si la propriété p_j est vraie pour e_i. Dans le cas de figures composées de plusieurs éléments, leur représentation sera un *multi-ensemble* de simplexes.

Afin de résoudre l'analogie, nous représentons l'espace des transformations et figures possibles par un complexe. En effet, nous considérons la même relation μ mais cette fois sur tous les éléments connus de l'univers, et nous obtenons une grande matrice, dont chaque ligne est représentée par un simplexe,



(a) Éléments de l'univers de ESQIMO, appelés de haut en bas et de gauche à droite, e_1 à e_{12}.



(b) Vue 2D de $C(\Omega)$.

FIG. 8 - *Éléments manipulés par ESQIMO et leur représentation simpliciale.*

et qui est toute entière représentée par un complexe $C(\Omega)$ (voir figure 8b). Chaque élément des figures du test peut alors être placé sur $C(\Omega)$.

4.2 Algorithme simplifié

On décompose habituellement la résolution de cette analogie en quatre étapes :

- Première étape : déterminer la(les) relation(s) possible(s) entre A et B : R_{AB}.
- Deuxième étape : déterminer la(les) relation(s) possible(s) entre A et C : R_{AC}.
- Troisième étape : appliquer R_{AB} à C en se restreignant au domaine déterminé grâce à R_{AC}.
- Quatrième étape : vérifier la correspondance entre B et D par la relation R_{AC}.

Nous plaçons les simplexes S_A de A et S_B de B sur le complexe $C(\Omega)$. L'étape 1 de résolution de l'analogie revient alors à trouver une relation entre S_A et S_B, c'est-à-dire un moyen de passer de l'un à l'autre : *nous modélisons cette transformation par un chemin polygonal* de S_A à S_B dans $C(\Omega)$.

L'étape 2, consiste à trouver le domaine de S_C à déformer le long du précédent chemin pour obtenir S_D. En effet, l'application de la transformation T_{AB} à C est modélisée par la déformation de S_C le long du chemin $S_A o ... o S_B$, ce qui constitue la troisième étape [9]. Le simplexe S_D est alors la représentation simpliciale de D. La quatrième étape est optionnelle.

Dans le cas de figures composées de plusieurs éléments, nous plaçons un simplexe de A avec un simplexe de B à la fois sur $C(\Omega)$ et nous cherchons des transformations élémentaires, c'est-à-dire des chemins de déformation à appliquer en parallèle (pour plus de détails voir le manuel de ESQIMO [Val98]).

4.3 Exemple de résolution avec ESQIMO

Nous avons procédé à deux séries de tests empiriques sur 10 puis 20 sujets (pour le protocole et les analyses de résultats, voir [Val97]) afin d'étudier les différentes transformations possibles utilisées par les humains. Cela nous a permis de développer plusieurs heuristiques dans l'algorithme général d'ESQIMO, puis de tester les résultats de résolutions avec ESQIMO.

Dans le premier exemple, nous présentons les figures A, B et C de l'illustration 9, et nous attendons la réponse D correspondant au résultat empirique le plus fréquent.

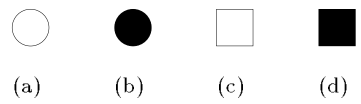


FIG. 9 - *Les figures A, B and C sont définies, et nous nous attendons à la réponse D.*

Nous définissons les trois figures sur l'interface d'ESQIMO, avec la figure A ne contenant que l'élément e_1 et ainsi

9. Cela revient à appliquer une application *simpliciale*, mais cette notion mathématique n'est pas introduite ici.

de suite. Nous demandons le nom de l'élément solution, lors d'une résolution simple, dans l'univers `omega` (désignant $C(\Omega)$), avec les figures A, B, C définies précédemment. La réponse est bien e_5, qui désigne un petit carré noir (voir 8) comme attendu sur la figure 9. Pour d'autres exemples voir [VG98a, Val98].

Différents modèles ont déjà été proposés pour la résolution d'analogies comme SME [FFG89, Gen83], ANALOGY [Eva68, Ha91], ARCS [HT89]. Notre principal apport dans ce domaine réside dans l'exploration d'une résolution de type diagrammatique et surtout dans la proposition d'un nouveau système de représentation des connaissances basé sur la topologie algébrique. Les résultats fournis par ESQIMO sont satisfaisants par rapport aux données empiriques et surtout en considérant la simplicité du modèle. Nous travaillons sur la résolution d'analogies plus complexes et sur l'expression de propriétés relatives pour la description des figures des tests.

4.3.1 Efficacité

Du point de vue de l'efficacité, intéressons nous au coeur de l'algorithme de ESQIMO : la recherche du plus court chemin de dimension maximale entre deux simplexes plongés dans un complexe.

Rechercher un chemin de connexité de dimension q entre deux simplexes revient à rechercher de proche en proche des simplexes voisins aux simplexes des extrémités. Cela revient à utiliser la matrice d'incidence de la relation $\lambda \subset A \times B$ et à rechercher les lignes qui ont en commun au moins q éléments 1 (ce qui nous ramène à nos mesures de similarité binaires). Pour faire cela, il suffit de calculer le produit ${}^tM.M - 1$ où M est la matrice d'incidence et ${}^tM$ sa transposée.

La matrice résultant indique alors le nombre d'éléments partagés par deux simplexes, seulement si ce nombre est positif. Si ce nombre est négatif, alors il n'y a pas d'éléments partagés.

Cela permet de trouver les classes d'équivalence de la relation “être q-connecté”, en fixant le seuil q voulu à la lecture. Ainsi on peut trouver les chemins de plus grande dimension reliant deux simplexes dans un complexe, c'est-à-dire dans une matrice.

Cette recherche est bornée à $\circ(p^3)$ où $p = max(Card(A), Card(B))$.

5 Conclusions

Le formalisme simplicial semble suffisamment riche pour prétendre supporter une représentation spatiale des connaissances. Nous l'avons choisi pour des raisons de naturalité et d'expressivité, et nous l'avons étudié pour tester ses autres propriétés. Il semble se comporter de façon prometteuse pour la représentation des hiérarchies, le traitement des exception, l'ajout de connaissances nouvelles, qui peuvent intervenir dans des applications basées sur l'apprentissage ou la catégorisation.

En ce qui concerne le modèle de construction de représentations simpliciales, nous soulignons les propriétés communes entre le modèle de Holland [HHNT86] et les complexes simpliciaux qui nous permettent de construire des représentations qui nous semblent naturelles et adaptées à l'expression et à l'utilisation de relations spatiales.

Références

[Atk77] R. H. Atkin. *Combinatorial Connectivities in Social Systems.* Verlag, 1977.

[Bra85] Ronald J. Brachman. "i lied about the trees" : Or, defaults and definitions in knowledge representation. *The AI Magazine*, 6:80–93, 1985.

[Cas94] J. L. Casti. *Complexification.* Harper Perennial, 1 edition, 1994.

[Eva68] Thomas G. Evans. A program for the solution of a class of geometric analogy intelligence-test questions. In *Semantic Information Processing*, chapter 5, pages 271–353. The MIT Press, 1968.

[FFG89] Brian Falkenhainer, Kenneth D. Forbus, and Dedre Gentner. The structure-mapping engine. *Artificial Intelligence*, 41(1):1–63, November 1989.

[Gen83] Dedre Gentner. Structure-mapping a theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2):155–170, April-June 1983.

[GI92] M.-D. Gineste and B. Indurkhya. Modèles mentaux, analogie et cognition. In *Les modèles mentaux, approche cognitive des représentations*, chapter 6, pages 143–170. masson, Paris, 1992.

[GV98] Jean-Louis Giavitto and Erika Valencia. Combinatorial algebraic topology for dagrammatic reasoning. Technical Report 1165, LRI, ura 410, april 1998.

[Ha91] J. P. Haton and al. *Le raisonnement en intelligence artificielle.* InterEditions, 1991.

[HE97] Christopher Habel and Carola Eschenbach. Abstract structures in spatial cognition. In Christian Freska, Matthias Jantzen, and RÜdiger Valk, editors, *Foundations of Computer Science*, volume 1337 of *LNCS*. Springer-Verlag, 1997.

[HHNT86] John H. Holland, Keith J. Holyoak, Richard E. Nisbett, and Paul R. Thagard. *Induction – Processes of Inference, learning, and Discovery.* The MIT Press, 1986.

[HT89] K. J. Holyoak and P. Thagard. Analogical mapping by constraint satisfaction. *Cognitive Science*, 13(3):295–355, July-september 1989.

[JL92] N. Johnson-Laird. La théorie des modèles mentaux. In *Les modèles mentaux, approche cognitive des représentations*, chapter Introduction, pages 1–21. masson, Paris, 1992.

[Lug98] Luger. *Artificial Intelligence.* Addison-Wesley, 1998.

[Val97] Erika Valencia. Un modèle topologique pour le raisonnement diagrammatique. Rapport pour le DEA Sciences Cognitives, LIMSI. See also `http://www.lri.fr/~erika/`, August 1997.

[Val98] Erika Valencia. Hitch hiker's guide to esqimo. RR 1173, LRI, ura 410 CNRS, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France. See also `http://www.lri.fr/~erika/`, May 1998.

[VDK96] Tony Veale, Diarmuid O Donoghue, and Mark Keane.

Computability as a limiting cognitive constraint: Complexity concerns in metaphor comprehension about which cognitive linguists should be aware. On the Metaphor Web Sit, Dublin City University, to be published in Cognitive Linguistics, 1996.

[VG98a] Erika Valencia and Jean-Louis Giavitto. Algebraic topology for knowledge representation in analogy solving. In ECCAI, editor, *European Conference on Artificial Intelligence (ECAI98)*, pages 88–92, Brighton, UK, 23–28 August 1998. Christian Rauscher.

[VG98b] Erika Valencia and Jean-Louis Giavitto. Topologie algébrique pour la construction de représentations diagrammatiques. In Paris 8, editor, *7ème Colloque de l'Association pour la Recherche Cognitive*, Paris, France, dic 1998. ARC.

[VGS98] Erika Valencia, Jean-Louis Giavitto, and Jean-Paul Sansonnet. Esqimo: Modelling analogy with topology. In Franck Ritter and Richard Young, editors, *Second European Conference on Cognitive Modelling (ECCM2)*, pages 212–213, Nottingham, UK, 1–4 April 1998. Nottingham University Press.

[WS90] S. H. Weber and A. Stolcke. l_0: A testbed for miniature language acquisition. *International Computer Science Institute*, 1990.