Topologie algébrique pour la construction de représentations diagrammatiques

Erika Valencia, Jean-Louis Giavitto
LRI, ura 410; Bât 490, Université Paris-Sud;
F-91405 Orsay Cedex.
{erika, giavitto}@lri.fr

25 novembre 1998

Résumé

Nous proposons un cadre formel pour la description de représentations diagrammatiques, basé sur la notion de complexe simplicial issue de la topologie algébrique. Nous présentons un modèle simple de construction de telles représentations, par catégorisation. Puis, nous évoquons brièvement le système ESQIMO développé pour illustrer l'utilisation de ces représentations dans un problème d'analogie.

Mots clés : Construction de représentations diagrammatiques, Topologie algébrique, Raisonnement diagrammatique, Problème d'analogie.

Proposition pour une **présentation orale**
au **symposium "Construction des représentations"**.

1 Introduction

Le raisonnement diagrammatique s'intéresse à l'utilisation des relations spatiales pour la représentation de connaisances et la modélisation de certains raisonnements. Cela inclut les domaines des formalismes visuels [Har95], des inférences diagrammatiques [GPP95, Lin95], des approches diagrammatiques de la logique [Shi91, BE95], la physique qualitative [For95] et la formalisation des relations spatiales. Dans tous les cas, il est primordial de se pencher sur le choix d'une représentation pour supporter un raisonnement diagrammatique.

Les primitives impliquées dans la description de diagrammes ne font intervenir que des propriétés spatiales non métriques. Lorsqu'une métrique est néanmoins suggérée, c'est souvent une relation d'ordre partiel qui se cache derrière comme "plus grand que", etc [GV98]. Une représentation diagrammatique doit donc exploiter des relations spatiales comme le voisinage, l'inclusion, les points de contact, l'intersection, les chemins et préserver l'expressivité qui fait la force des représentations diagrammatiques. De ce point de vue, les formalisations logiques souffrent d'un manque de graphicalité [LP97].

La topologie algébrique est un cadre théorique permettant de formaliser des relations spatiales discrètes. Cette théorie mathématique peut alors nous fournir une base solide pour la modélisation de représentations diagrammatiques tout en préservant leur expressivité. De plus, nous verrons qu'une approche algébrique permet une description constructive menant à une réalisation informatique.

2 Un formalisme topologique pour la construction de représentations

Nous présentons maintenant la structure de base que nous utilisons dans la construction de représentations topologiques : le complexe simplicial. Cette introduction nécessaire est rédigée le moins mathématiquement possible.

2.1 Notions élémentaires de topologie algébrique

On appelle k-cellule, un morceau d'espace « abstrait » de dimension k et qui ne contient aucun trou. Ces cellules sont des briques de base pour la construction d'un espace C moyennant les conditions :

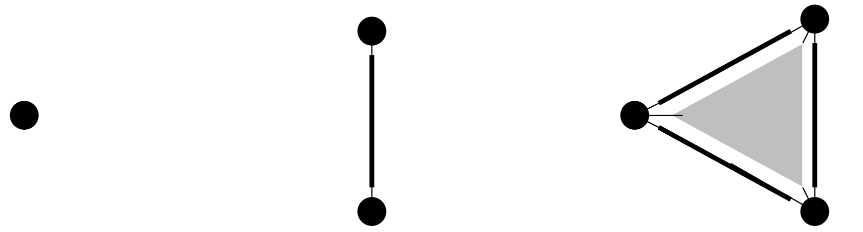
- le bord d'une cellule est constitué d'une union finie de cellules de C ;
- l'intersection de deux cellules de C est soit vide, soit une autre cellule de C.

On dit alors que C est un *complexe cellulaire*. La structure abstraite correspondante est celle de *complexe simplicial* :

Definition 1 *Un complexe simplicial abstrait est un couple (V, C) où V est un ensemble de sommets et C un ensemble de parties finies de V telles que si $s \in C$ alors toutes les parties $s' \in s$ appartiennent aussi à C. Les éléments de C sont des simplexes abstraits, la dimension d'un simplexe est le nombre de sommets moins un, la dimension du complexe C est celle du plus grand simplexe qu'il contient.*

Un simplexe peut être vu comme un polyèdre prenant appui sur des sommets. La figure 1 montre un simplexe de dimension 0, réduit à un point, et des simplexes de dimensions 1, 2.

Dans un complexe, deux simplexes peuvent se toucher, ils partagent alors une *face*. En cheminant le long de simplexes qui se touchent deux à deux dans un complexe, on parcourt une *chaîne polygonale*.



(a) 0-simplexe

(b) Les deux extrémités du 1-simplexe, sont des 0-simplexes

(c) Le 2-simplexe contient les 0-simplexes et 1-simplexes sur lesquels il s'appuie

FIG. 1 – *Réalisation géométrique de n-simplexes* $n = 0, 1, 2$.

λ	a_1	a_2	a_3
b_1	1	0	0
b_2	0	1	1
b_3	1	1	0

TAB. 1 – *Matrice d'incidence associée à* λ.

2.2 Représentation de relations binaires : Q-Analyse

La Q-Analyse, introduite par Atkin [Atk77, Atk81, Joh91] pour représenter des relations binaires à l'aide de complexes, a déjà été utilisée pour modéliser les interactions entre agents [Dor86, PLC91, Cas92], les relations sociales [Atk77, Gou80, Cas94] et les positions aux échecs [Atk76].

Considérons la relation binaire λ décrite par sa matrice d'incidence (table 1). Chaque ligne nous renseigne sur un élément b_i de B, en décrivant les éléments a_j de A auxquels il est relié par λ. Représentons les éléments de A comme des sommets. Chaque élément de B peut alors être représenté comme un simplexe ayant pour sommets les éléments auxquels il est λ-relié. Ici, b_1 est représenté comme un simplexe de dimension 0 (figure 2(a)) car il ne s'appuie que sur a_1.

Nous pouvons également considérer la représentation duale (figure 2(b)) dans laquelle ce sont les éléments de B qui sont les sommets. Cette représentation duale permet de mettre en valeur d'autres structures dans l'organisation des connaissances représentées. La Q-analyse consiste en l'étude des parties connectées d'une représentation et ce ne sont pas les mêmes selon que l'on considère la représentation duale ou non [1]. Les parties connectées sont les parties qui ont des bords en commun, ces bords peuvent être interprétés comme des frontières entre concepts dans une représentation simpliciale. Les concepts sont alors représentés par ce qu'ils ont de commun et de différent avec les autres.

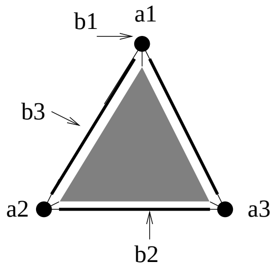
2.3 Représentation d'ensembles de prédicats

Nous avons étendu la Q-analyse afin de permettre la représentation d'ensembles de prédicats. Considérons l'ensemble $P = \{p_1, ..., p_n\}$ de n prédicats et l'ensemble A d'objets. Il est possible de représenter la valeur de ces prédicats sur l'ensemble des objets par un complexe en considérant la relation binaire $\mu \in A \times P$ telle que l'élément de matrice $\mu(a_i, p_j) = 1$ si le prédicat p_j est vrai pour a_i.

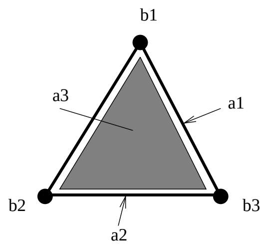
Prenons par exemple

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

1. Un exemple plus développé mettant en valeur les différences entre représentations duales est disponible dans [Val97, Cas94]



(a) Représentation de λ en prenant a_i comme sommets et b_i comme simplexes. b_1 est réduit à a_1, b_2 est le simplexe $\langle a_2, a_3 \rangle$,etc.



(b) Représentation duale de λ en prenant a_i comme sommets et b_i comme simplexes

FIG. 2 – *Représentations simpliciales de λ.*

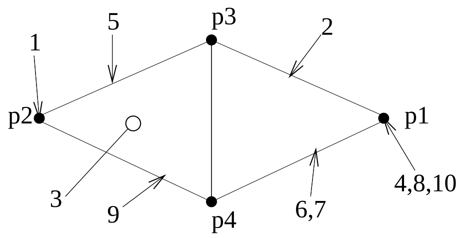
$$P = \{\text{pair, impair, premier, multiple de } 3\}$$

la matrice d'incidence de μ est alors celle de la figure 3 et la représentation simpliciale en prenant les prédicats comme sommets est donnée par la figure 3b. Les nombres $4, 8, 10$ sont représentés comme équivalents car aucun prédicat ne permet de les discerner.

En effet, avec une représentation simpliciale, deux éléments ayant les mêmes propriétés (selon les prédicats de l'ensemble P) sont représentés comme équivalents. De même, deux prédicats ne sont représentés comme différents que s'il existe un objet du monde (de l'ensemble A) sur lequel leurs valeurs diffèrent. Cette propriété est *l'égalité des indiscernables.*

	p_1	p_2	p_3	p_4
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	0	1	1	0
6	1	0	0	1
7	0	1	1	0
8	1	0	0	0
9	0	1	0	1
10	1	0	0	0

(a) Matrice d'incidence de μ



(b) Complexe dual associé à μ

FIG. 3 – *Exemple de représentation simpliciale d'un ensemble de prédicats sur un ensemble d'objets.*

2.4 Un modèle pour la construction d'une représentation simpliciale

Plusieurs auteurs ont étudié le passage entre l'« environnement » et la construction d'une représentation. Le morphisme reliant un modèle avec le monde représenté dépend du « processus même d'ordonancement du monde : la catégorisation » [GI92]. Il existe plusieurs approches de l'activité de catégorisation, Holland [HHNT86] propose un modèle basé sur des fonctions de catégorisation réalisant des classes d'équivalence sur les stimuli, cette proposition est illustrée par la figure 4.

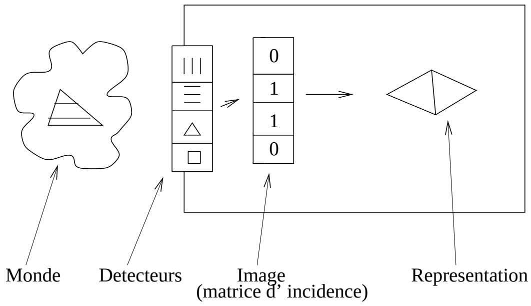


FIG. 4 – *Correspondance entre un état du monde et une représentation : les détecteurs s'allument selon les propriétés des objets observés.*

Dans ce modèle, les détecteurs sont des prédicats pouvant prendre les valeurs 0 ou 1 selon que les objets à détecter allument le détecteur ou non. Ces détecteurs $d_1, ..., d_n$ codent les états du monde à l'aide d'une fonction de catégorisation C qui partitionne les états du système et divise le monde en classes d'équivalence [2]. La fonction C traite donc les objets qui ne sont pas discernables grâce à ces détecteurs comme équivalents : il y a *égalité des indiscernables.*

À l'issue de l'encodage de Holland, il est aisé d'extraire une représentation simpliciale. Considérons le vecteur d'états des détecteurs associé à la perception d'un objet, comme une ligne de la matrice décrivant la relation binaire qui existe entre les objets du monde et les détecteurs. Chaque objet est alors un simplexe, et un état du système, un complexe.

La construction d'une représentation ne prend un sens que dans le cadre d'une activité cognitive, nous allons maintenant appliquer ce modèle à une tâche simple de résolution d'analogies.

3 Illustration: utilisation d'une représentation simpliciale dans un problème d'analogie

Considérons la résolution diagrammatique d'un problème classique de tests de QI, déjà étudié par Evans [Eva68], énoncé par:

Soient trois figures (géométriques) A, B et C,
trouver une quatrième figure D, telle que C soit à D ce que A est à B.

Cette analogie est résolue en quatre étapes :

- *Étape 1* : trouver une transformation T_{AB} entre A et B ;
- *Étape 2* : déterminer le domaine de C sur lequel appliquer la transformation ;
- *Étape 3* : appliquer T_{AB} à ce domaine de C ;
- *Étape 4* (facultative) : vérifier la symétrie en appliquant T_{AC} à B.

Le système ESQIMO [VGS98, VG98], que nous présentons ici est développé en `Caml`, et résoud automatiquement des tests de QI en construisant une représentation simpliciale du problème.

3.1 Représentation de l'espace du problème

Les tests sont exprimés avec 12 figures géométriques de base : (voir figure 5a):

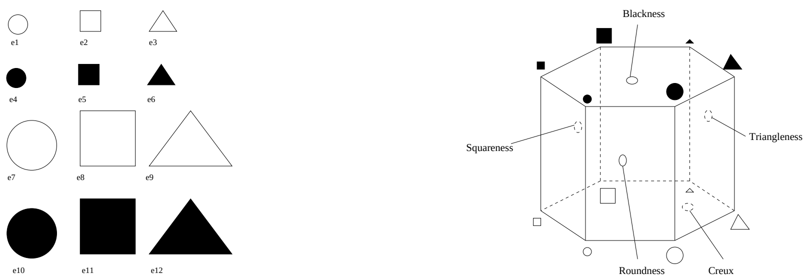
$$E = \{e_1, ..., e_{12}\}$$

2. Un modèle basé sur une telle catégorisation met en correspondance plusieurs objets avec une représentation, c'est un homomorphisme [HHNT86]

qui sont décrites à l'aide de sept propriétés tirées de l'étude de Weber [WS90] :

$$P = \{p_1, ..., p_7\} = \{\text{rond, carré, triangle, blanc, noir, petit, grand}\}$$

Chaque test consiste en la donnée de *trois figures* composées de un ou plusieurs *éléments* de E. Les éléments observés sur chaque figure correspondent aux objets du monde dans le modèle de la figure 4, les prédicats correspondent aux détecteurs. Chacun des éléments de ces figures est donc perçu comme un vecteur d'états des détecteurs et ensuite représenté comme un simplexe d'après le modèle de construction précédent. Pour cela, nous considérons la relation binaire ν qui existe entre l'ensemble E et l'ensemble P. La matrice de ν sera telle que l'élément $(e_i, p_j) = 1$ si la propriété p_j est vraie pour e_i. Dans le cas de figures composées de plusieurs éléments, leur représentation sera un *multi-ensemble* de simplexes.



(a) Éléments de l'univers de ESQIMO, appelés de haut en bas et de gauche à droite, e_1 à e_{12}.

(b) Vue 2D de $C(\Omega)$.

FIG. 5 – *Éléments manipulés par ESQIMO et leur représentation simpliciale.*

Afin de résoudre l'analogie, nous représentons l'espace des transformations et figures possibles par un complexe. En effet, nous considérons la même relation μ mais cette fois sur tous les éléments connus de l'univers, et nous obtenons une grande matrice, dont chaque ligne est représentée par un simplexe, et qui est toute entière représentée par un complexe $C(\Omega)$ (voir figure 5b). Chaque élément des figures du test peut alors être placé sur $C(\Omega)$.

3.2 Algorithme simplifié

Nous plaçons les simplexes S_A de A et S_B de B sur le complexe $C(\Omega)$. L´étape 1 de résolution de l'analogie revient alors à trouver une relation entre S_A et S_B, c'est-à-dire un moyen de passer de l'un à l'autre : *nous modélisons cette transformation par un chemin polygonal* de S_A à S_B dans $C(\Omega)$.

L´étape 2, consiste à trouver le domaine de S_C à déformer le long du précédent chemin pour obtenir S_D. En effet, l'application de la transformation T_{AB} à C est modélisée par la déformation de S_C le long du chemin $S_A o...o S_B$ [3]. Le simplexe S_D est alors la représentation simpliciale de D.

Dans le cas de figures composées de plusieurs éléments, nous plaçons un simplexe de A avec un simplexe de B à la fois sur $C(\Omega)$ et nous cherchons des transformations élémentaires, c'est-à-dire des chemins de déformation à appliquer en parallèle (pour plus de détails voir le manuel de ESQIMO [Val98]).

3.3 Exemples de résolution avec ESQIMO

Nous avons procédé à deux séries de tests empiriques sur 10 puis 20 sujets afin d´étudier les différentes transformations possibles utilisées par les humains. Cela nous a permis de dévelop-

3. Cela revient à appliquer une application *simpliciale*, mais cette notion mathématique n'est pas introduite ici.

per plusieurs heuristiques dans l'algorithme général d'ESQIMO, puis de tester les résultats de résolutions avec ESQIMO [4].

Dans le premier exemple, nous présentons les figures A, B et C de l'illustration 6, et nous attendons la réponse D correspondant au résultat empirique le plus fréquent.

FIG. 6 – *Les figures A, B and C sont définies, et nous nous attendons à la réponse D.*

Nous définissons les trois figures sur l'interface d'ESQIMO, avec la figure A ne contienant que l'élément e_1 et ainsi de suite :

```
#let A = e1 and B = e4 and C = e2;;
```

Nous demandons le nom de l'élément solution, lors d'une résolution simple, dans l'univers `omega` (désignant $C(\Omega)$), avec les figures A, B, C définies précédemment [5] :

```
#nom_de(elements(resoud_simple omega A B C));;
- : "e5"
```

La réponse est bien e_5, qui désigne un petit carré noir (voir 5)comme attendu sur la figure 6.

Voici maintenant un exemple avec des figures composées sans conservation du nombre d'éléments :

```
#let A = [e1;e5] and B = [e4;e2;e8] and C = [e3;e4];;
#map nom_de(resoud_compose omega A B C);;
- : [e6;e1;e7]
```

La solution donnée est bien composée de trois éléments, un petit triangle noir, un petit rond blanc et un grand rond blanc, comme attendu sur la figure 7, ce qui correspond bien aux résultats empiriques les plus fréquents.

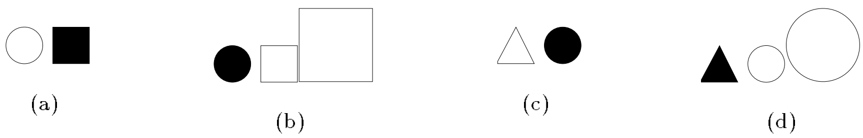


FIG. 7 – *Deux transformations élémentaires sont considérées en parallèle et l'un des éléments est dupliqué pour produire un troisième élément.*

4 Conclusions

Différents modèles ont déjà été proposés pour la résolution d'analogies comme SME [FFG89, Gen83], ANALOGY [Eva68, Ha91], ARCS [THNG90]. Notre principal apport dans ce domaine réside dans l'exploration d'une résolution de type diagrammatique et surtout dans la proposition

4. Les résultats de ces tests sont présentés dans [Val97].

5. Pour une explication sur l'utilisation des fonctions `resoud_simple`, `nom_de`. etc, voir le manuel [Val98]. ESQIMO se présente comme une bibliothèque de fonctions `Caml` que l'on appelle interactivement à la console.

d'un nouveau système de représentation des connaissances basé sur la topologie algébrique. Les résultats fournis par ESQIMO sont satisfaisants par rapport aux données empiriques et surtout en considérant la simplicité du modèle. Nous travaillons sur la résolution d'analogies plus complexes et sur l'expression de propriétés relatives pour la description des figures des tests.

En ce qui concerne le modèle de construction de représentations simpliciales, nous soulignons les propriétés communes entre le modèle de Holland [HHNT86] et les complexes simpliciaux qui nous permettent de construire des représentations qui nous semblent naturelles et adaptées à l'expression et à l'utilisation de relations spatiales. Nous travaillons actuellement sur l'utilisation d'opérateurs topologiques plus sophistiqués pour manipuler ces représentations, par exemple l'homotopie.

Références

[Atk76] Atkin & al. Fred CHAMP positional chess analyst. *International Journal of Man-Machine Studies*, 8:517–529, 1976.

[Atk77] R. H. Atkin. *Combinatorial Connectivities in Social Systems.* Verlag, 1977.

[Atk81] R. H. Atkin. *Multidimensional Man.* Penguin, 1981.

[BE95] Jon Barwise and John Etchemendy. Heterogenous logic. In *Diagrammatic Reasoning*, chapter 7, pages 211–234. AAAI Press, 1995.

[Cas92] John Casti. *Reality Rules: Picturing the world in mathematics. II — The Frontiers.* Wiley, 1992.

[Cas94] J. L. Casti. *Complexification.* Harper Perennial, 1 edition, 1994.

[Dor86] P. Doreian. Analysing overlaps in food webs. *J. Soc. & Biol. Structures*, 9:115–139, 1986.

[Eva68] Thomas G. Evans. A program for the solution of a class of geometric analogy intelligence-test questions. In *Semantic Information Processing*, chapter 5, pages 271–353. The MIT Press, 1968.

[FFG89] Brian Falkenhainer, Kenneth D. Forbus, and Dedre Gentner. The structure-mapping engine. *Artificial Intelligence*, 41(1):1–63, November 1989.

[For95] Kenneth D. Forbus. Qualitative spatial reasoning framework and frontiers. In Janice Glasgow, editor, *Diagrammatic Reasoning.* AAAI Press/MIT Press, 1995.

[Gen83] Dedre Gentner. Structure-mapping a theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2):155–170, April-June 1983.

[GI92] M.-D. Gineste and B. Indurkhya. Modèles mentaux, analogie et cognition. In *Les modèles mentaux, approche cognitive des représentations*, chapter 6, pages 143–170. masson, Paris, 1992.

[Gou80] P. Gould. Q-analysis, or a language of structure : An introduction for social scientists, geographers and planners. *International Journal of Man-Machine Studies*, 13:169–199, 1980.

[GPP95] Michelangelo Grigni, Dimitris Papadias, and Christos Papadimitriou. Topological inference. In *Topological Inference*, pages 901–907, 1995.

[GV98] Jean-Louis Giavitto and Erika Valencia. Combinatorial algebraic topology for dagrammatic reasoning. Technical Report 1165, LRI, ura 410, april 1998.

[Ha91] J. P. Haton and al. *Le raisonnement en intelligence artificielle.* InterEditions, 1991.

[Har95] David Harel. On visual formalism. In Janice Glasgow, editor, *Diagrammatic Reasoning.* AAAI Press/MIT Press, 1995.

[HHNT86] John H. Holland, Keith J. Holyoak, Richard E. Nisbett, and Paul R. Thagard. *Induction – Processes of Inference, learning, and Discovery.* The MIT Press, 1986.

[Joh91] J. Johnson. *The mathematical revolution inspired by computing*, chapter The mathematics of complex systems, Johnson J. and Loomes M. eds., pages 165–186. Oxford University Press, 1991.

[Lin95] Robert K. Lindsay. Images and inferences. In *Diagrammatic Reasoning*, chapter 4, pages 111–135. AAAI Press, 1995.

[LP97] Oliver Lemon and Ian Pratt. Spatial logic and the complexity of diagrammatic reasonning. *Graphics and Vision*, 6(1):89–109, 1997.

[PLC91] J. Pimm, J. Lawton, and J. Cohen. Food web patterns and their consequence. *Nature*, 350:669–674, 25 April 1991.

[Shi91] Sun-Joo Shin. An information-theoretic analysis of valid reasoning with venn diagrams. In Jon Barwise et al., editor, *Situation Theory and its Applications*, volume Part 2. Cambridge University Press, 1991.

[THNG90] P. Thagard, K. J. Holyak, G. Nelson, and D. Gochfeld. Analog retrieval by constraint satisfaction. *Artificial Intelligence*, 46(3):259–310, December 1990.

[Val97] Erika Valencia. Un modèle topologique pour le raisonnement diagrammatique. Rapport pour le DEA Sciences Cognitives, LIMSI. See also `http://www.lri.fr/~erika/`, August 1997.

[Val98] Erika Valencia. Hitch hiker's guide to esqimo. RR 1173, LRI, ura 410 CNRS, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France, May 1998.

[VG98] Erika Valencia and Jean-Louis Giavitto. Algebraic topology for knowledge representation in analogy solving. In ECCAI, editor, *European Conference on Artificial Intelligence (ECAI98)*, pages 88–92, Brighton, UK, 23–28 August 1998. Christian Rauscher.

[VGS98] Erika Valencia, Jean-Louis Giavitto, and Jean-Paul Sansonnet. Esqimo: Modelling analogy with topology. In Franck Ritter and Richard Young, editors, *Second European Conference on Cognitive Modelling (ECCM2)*, pages 212–213, Nottingham, UK, 1–4 April 1998. Nottingham University Press.

[WS90] S. H. Weber and A. Stolcke. l_0 : A testbed for miniature language acquisition. *International Computer Science Institute*, 1990.