Introduction au formalisme CAT pour la représentation spatiale des connaissances

Erika Valencia
LRI, ura 410; Université Paris-Sud;
F-91405 Orsay Cedex.
erika@lri.fr

30 novembre 1998

Rapport interne LRI RR-1192

Résumé

Nous présentons ici le formalisme CAT déjà introduit dans [VG98b, GV98], en détaillant ses propriétés en tant que formalisme de représentation spatiale des connaissances. Ce formalisme est basé sur la Q-Analyse introduite par Atkin dans [Atk77], elle même reposant sur le concept central de complexe simplicial issu de la topologie algébrique. CAT est donc un formalisme topologique de RKS.

Mots clés : Topologie algébrique, Représentation spatiale des connaissances, Naturalité, Expressivité, Granularité, Raisonnement par analogie.

1 Introduction

Les *concepts spatiaux* et *structures spatiales* peuvent être utiles pour représenter des connaissances qui ne sont pas nécessairement spatiales. En effet, nous adhérons à l'hypothèse selon laquelle il existe une *analogie* de structure entre l'espace concret [1] et d'autres domaines, puisque notre interaction avec l'espace concret est la base de notre expérience et donc de notre connaissance [HE97]. Par exemple, Habel [HE97] met l'accent sur la structure d'*ordre* commune à l'espace et au temps et qui se traduit entre autres par l'utilisation du même mot "entre" [2] pour parler d'un objet "entre" deux autres *spatialement*, mais également d'un instant compris "entre" deux autres *temporellement*.

En Intelligence Artificielle, les concepts spatiaux issus de l'expérience du monde physique sont la base pour construire des *formalismes* de *représentaion des connaissances*. Nous pouvons ainsi raisonner dans plusieurs domaines en modelant des structures spatiales qui restent à définir. Pour certains ces structures dépendent fortement de la tâche à réaliser, pour d'autres, elle doit être suffisament générale pour s'appliquer à toutes sortes de tâches cognitives. Sans prendre une position tranchée dans ce débat, nous nous pencherons ici sur l'étude particulière d'un outil pour la représentation spatiale de connaissances, basé sur la *topologie algébrique*.

En effet, les relation spatiales exploitables pour représenter des connaissances, se divisent généralement en trois grandes catégories :

- Les concepts topologiques : régions, bords, transformations, ...
- Les concepts métriques : distances, tailles, ...
- Les concepts d'ordre : comparaisons, positions relatives, ...

Nous nous intéressons ici à une utilisation des concepts topologiques uniquement et nous aborderons ensuite les aspects liés au concept de relation d'ordre. Nous ne sommes pas intéressés par les concepts métriques puisque nous nous pencherons sur des tâches cognitives qui ne requièrent pas l'intervention d'une métrique.

L'évaluation d'un système de représentation des connaissances se fait selon 4 critères essentiellement [Lug98] :

- Abstraction : la représentation ne doit contienir que des informations pertinentes pour que le pouvoir d'abstraction est satisfaisant.
- Expressivité : toute la connaissance nécessaire doit être exprimable dans la représentation.
- Naturalité : l'expression de la connaissance nécessaire doit se faire de manière naturelle [3], les propriétés nécessaires doivent être accesibles (visibles, calculables) facilement.
- Efficacité : l'exécution du programme résultant se fait de manière efficace (surtout en termes de temps pour une plausibilité cognitive)

Certaines de ces évaluations doivent se faire sur le système de représentation des connaissances lorsqu'il sera déjà élaboré, tandis que d'autres permettent de guider notre choix du formalisme de représentation. En particulier, nous attachons une grande importance aux critères de naturalité et d'expressivité (qui sont liés). Pour cette raison, et puisque nous nous intéressons aux concepts topologiques nous allons étudier la possibilité d'élaborer un formalisme pour la représentation spatiale (et topologique) des connaissances basé lui-même sur la topologie. Pour satisfaire au critère d'éfficacité nous devons utiliser une branche constructiviste de la topologie (du point de vue d'un informaticien), nous choisissons donc la topologie algébrique. De plus, des formalismes ayant déjà prouvé leur fort pouvoir d'abstraction, tels que les graphes conceptuels sont basé sur les graphes, qui sont un cas particulier de complexes simpliciaux, notion élémentaire de la topologie algébrique.

1. L'espace concret désigne ici le résultat de notre expérience physique.
2. en anglais "between".
3. Par exemple par une correspondance naturelle, dite *analogique* entre le matériel représenté et la représentation, voir Johson-Laird et les modèles mentaux [JL92].

2 Présentation du formalisme CAT

La topologie a pour objectif d'étudier l'*espace*. Un espace est un ensemble de points muni d'une relation de voisinage : dans la notion d'espace, on s'intéresse plus à la structure de voisinage qu'aux points pour eux-mêmes. Ainsi, on essaie de formaliser les notions de *continuité*, de *limite*, de *bord*, de *chemin*, etc. Nous appelerons notre formalisme de représenation des connaissances **CAT** pour Combinatorial Algebraic Topology [GV98].

Nous présentons maintenant la structure de base que nous utilisons dans le formalisme CAT : le complexe simplicial. Cette introduction nécessaire est rédigée le moins mathématiquement possible.

2.1 Les complexes simpiciaux

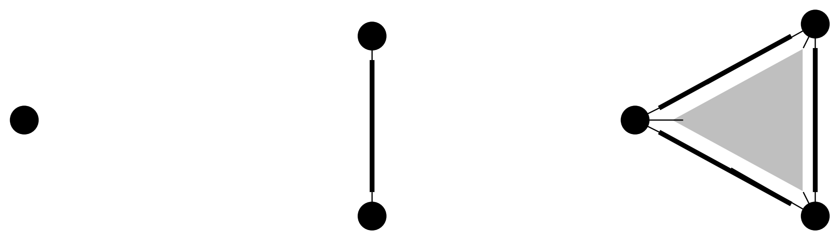
On appelle k-cellule, un morceau d'espace « abstrait » de dimension k et qui ne contient aucun trou. Ces cellules sont des briques de base pour la construction d'un espace C moyennant les conditions :

- le bord d'une cellule est constitué d'une union finie de cellules de C ;
- l'intersection de deux cellules de C est soit vide, soit une autre cellule de C.

On dit alors que C est un *complexe cellulaire*. La structure abstraite correspondante est celle de *complexe simplicial* :

Definition 1 *Un complexe simplicial abstrait est un couple (V, C) où V est un ensemble de sommets et C un ensemble de parties finies de V telles que si $s \in C$ alors toutes les parties $s' \in s$ appartiennent aussi à C. Les éléments de C sont des simplexes abstraits, la dimension d'un simplexe est le nombre de sommets moins un, la dimension du complexe C est celle du plus grand simplexe qu'il contient.*

Un simplexe peut être vu comme un polyèdre prenant appui sur des sommets. La figure 1 montre un simplexe de dimension 0, réduit à un point, et des simplexes de dimensions 1, 2.



(a) 0-simplexe

(b) Les deux extrémités du 1-simplexe, sont des 0-simplexes

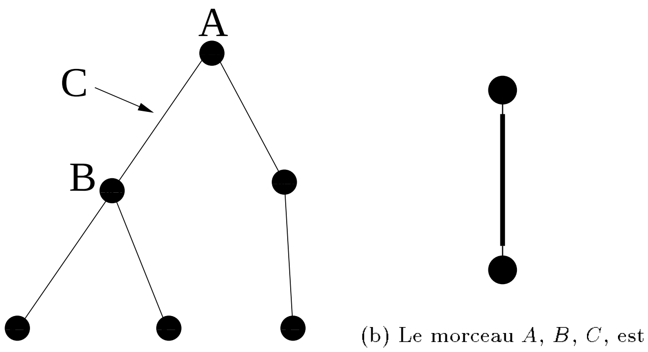
(c) Le 2-simplexe contient les 0-simplexes et 1-simplexes sur lesquels il s'appuie

FIG. 1 – *Réalisation géométrique de n-simplexes $n = 0, 1, 2$.*

Un 0-simplexe d'unique élément a_1, se note $\langle a_1 \rangle$, un 1-simplexe de sommets a_1 et a_2, se note $\langle a_1, a_2 \rangle$, et ainsi de suite. Dans un complexe, deux simplexes peuvent se toucher, ils partagent alors une *face*. Nous notons donc que la notion de complexe abstrait généralise la notion de graphe. En effet, tous les complexes de dimensions $n < 2$, sont des *graphes*.

Definition 2 (Graphe) *Le couple $G = (S, A)$, est un* graphe*, dont l'ensemble des sommets est S, et l'ensemble des arêtes est $A \subseteq S \times S$.*

Ainsi, nous pouvons voir sur la figure 2 que chaque partie d'un graphe est un simplexe. Les sommets sont des simplexes de dimension 0 et les arrêtes des simplexes de dimension 1. De plus, les intersections entre arrêtes sont bien des simplexes, le graphe en entier est donc un complexe simplicial. La dimension de ce complexe est celle du plus grand simplexe qu'il contient c'est-à-dire 1 aussi.



(a) Un morceau de graphe, avec les sommets A et B, et l'arc (A,B), noté C.

(b) Le morceau A, B, C, est un simplexe de dimension 1 (voir figure 1)

FIG. 2 – *Le graphe est un cas particulier de complexe simplicial, il est connecté, et sa dimension est* 1.

Parmi les représentations de connaissances à base de réseaux sémantiques[4], les formalismes proposés reposent souvent sur le concept de graphe (comme les graphes conceptuels par exemple). Cette structure de représentation est en effet très commode pour représenter des hiérarchies et des ontologies. Puisque les graphes sont un cas particulier de complexes, nous verrons comment il est également naturel de représenter des hiérarchies dans le formalisme CAT, et nous verrons également que cela présente un avantage du point de vue du traitement des exceptions.

Enfin, précisons que les complexes simpliciaux ne sont pas inconnus en informatique : ils sont utilisés par exemple pour la construction de volumes 3D [Elt94] et ont été proposés pour la formalisation des algèbres de processus et la représentation de contraintes spatio-temporelles.

2.2 Représenter des relations binaires

Atkin a proposé en 1977, une technique permettant de représenter des relations binaires à l'aide de complexes simpliciaux [Atk77, Atk81, Joh91]. Ce type de représentation, ainsi que son analyse est appelé la *Q-Analyse*. Elle a déjà été utilisée pour modéliser les interactions entre agents [Dor86, PLC91, Cas92], les relations sociales [Atk77, Gou80, Cas94] et les positions aux échecs [Atk76], par exemple. Voici comment les relations binaires sont représentées.

Considérons la relation binaire λ de l'ensemble $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dans l'ensemble $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, décrite par sa matrice d'incidence (table 1). Lorsqu'un élément a_i de A est λ-relié à un élément b_j de B, la case correspondante contient un 1, sinon elle contient un 0. Dans cette relation, nous n'admettons que des valeurs binaires, ici 0/1, mais aussi *Vrai/Faux*, etc... Il est possible d'adapter la technique qui va suivre pour la représentation de matrices à plusieurs valeurs [Cas94], par le biais de seuils par exemple, mais nous n'utiliserons pas cette extension dans nos travaux pour l'instant.

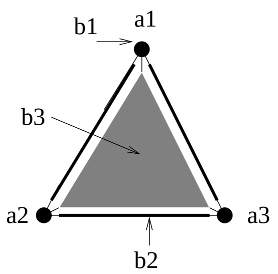
Représentons maintenant les éléments a_i de A comme des sommets dans un espace, ils sont tous distincts. Chaque élément b_j de B peut alors être représenté à partir des sommets auxquels il

4. On distingue les formalisme à base de logique, les formalisme procéduraux, les réseaux sémantiques, et les formalismes structurés comme les cripts, frames, les langages orientés objet [Lug98].

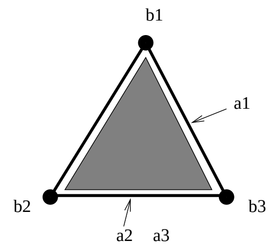
λ	a_1	a_2	a_3
b_1	1	0	0
b_2	0	1	1
b_3	1	1	1

TAB. 1 – *Matrice d'incidence associée à λ.*

est λ-relié. Par exemple, l'élément b_1 est seulement relié à a_1, nous dessinerons alors b_1 comme un simplexe reposant uniquement sur le sommet a_1 (lui-même un simplexe de dimension 0). Ainsi, b_1 et a_1 sont des 0-simplexes [5], confondus. Ensuite, b_2 est λ-relié à a_2 et a_3, il sera alors représenté comme un 1-simplexe reposant sur les deux 0-simplexes a_2 et a_3, et les contenant [6]. Enfin, b_3 est λ-relié à tous les éléments de A. Il sera représenté comme un 2-simplexe (trois sommets moins 1, donne une dimension 2) reposant sur les trois sommets a_1, a_2, a_3. Un 2-simplexe est ici une face triangulaire (comme montré sur la figure 1). Tous ces simplexes sont représentés sur la figure 3(a).



(a) Représentation de λ en prenant a_i comme sommets et b_i comme simplexes. b_1 est réduit à a_1, b_2 est le simplexe $\langle a_2, a_3 \rangle$,etc.



(b) Représentation duale de λ en prenant a_i comme sommets et b_i comme simplexes

FIG. 3 – *Représentations simpliciales de λ.*

Nous pouvons également considérer la représentation duale (figure 3(b)) dans laquelle ce sont les éléments de B qui sont les sommets. Cette représentation duale permet de mettre en valeur d'autres structures dans l'organisation des connaissances représentées. Toujours d'après la matrice d'incidence de la table 1, nous pouvons représenter a_1 comme un 1-simplexe reposant et contenant les 0-simplexes b_1 et b_3, a_2 comme un 1-simplexe reposant et contenant b_2 et b_3, et a_3 possède la même représentation que a_2.

Nous remarquons ici que a_2 et a_3 sont λ-reliés aux mêmes éléments de B, ils ne sont pas distinguables, ils jouent le même rôle. Cette information était *contenue* dans la représentation de la figure 3(a), mais elle n'y était pas mise en valeur. En effet, si nous regardons plus en détails cette première représentation, on peut déjà voir que a_2 et a_3 jouent un rôle symmétrique. Ils sont tous les deux un sommet de b_2, et un sommet de b_3, et n'ont aucune autre relation qui les distingue. Mais il faut utiliser la reprsentation duale pour le mettre en évidence visuellement.

Prenons un exemple simple de relation λ pour illustrer notre propos. Considérons l'ensemble F, de types de fleurs [Cas94] :

$$F = \{\text{tulipe}, \text{coquelicot}, \text{pensée}, \text{myosotis}\}$$

5. La dimension d'un simplexe, rappelon-le est le nombre de ses sommets moins 1, ici il y a un seul sommet.
6. Attention, le simplexes contient ses bords.

λ	tulipe	coquelicot	pensée	myosotis
rose	1	0	1	1
jaune	1	1	1	0
bleu	0	0	1	1
blanc	1	1	1	1

TAB. 2 – *Matrice Λ d'incidence de la relation $\lambda \subset F \times C$.*

et l'ensemble C, de couleurs :

$$C = \{\text{rose}, \text{jaune}, \text{bleu}, \text{blanc}\}$$

Une relation intéressante entre ces deux ensembles serait λ telle que :

la fleur f_i est λ-reliée à la couleur c_j ssi
il existe des fleurs du type de f_i ayant la couleur c_j sur terre.

dont la matrice d'incidence Λ est donnée par la table 2. Nous pouvons alors représenter les couleurs comme des complexes simpliciaux, chaque couleur étant définie par une ligne de la matrice Λ et constituant un simplexe. Le 2-simplexe représentant la couleur rose sera alors :

$$rose = \langle \text{tulipe}, \text{pensée}, \text{myosotis} \rangle$$

tandis que le 2-simplexe associé à jaune sera :

$$jaune = \langle \text{tulipe}, \text{pensée}, \text{coquelicot} \rangle$$

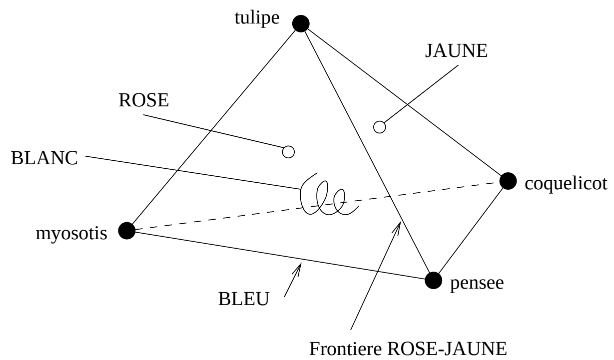


FIG. 4 – *Complexe associé à $\lambda \subset (Fleurs \times Couleurs)$. BLANC est un volume, JAUNE et ROSE sont des faces, BLEU est un trait.*

Nous pouvons aussi nous intéresser au complexe dual où les couleurs sont des sommets, et les fleurs des simplexes (voir figure 5), la matrice de λ^{-1} est obtenue simplement en transposant Λ.

Nous pouvons maintenant exhiber, le 1-simplexe associé à la *frontière* entre la couleur rose et la couleur jaune. On ne peut attribuer aucun nom de couleur à ce 1-simplexe, pourtant, *il ressort clairement de cette figure* et il est manipulable. Par contre, si l'on observe la table de la matrice Λ ci-dessus, les "1" définissant cette frontière existent, certes, mais ne sautent absolument pas aux yeux. Nous verrons comment cette remarque va nous permettre de parler de la représentation de concepts et de la découverte de concepts dans la section 3.3.

2.3 Représenter des ensembles de prédicats

Nous avons étendu cette technique de représentation introduite par Atkin, afin de permettre la représentation d'ensembles de prédicats. Considérons l'ensemble $P = \{p_1, ..., p_n\}$ de n prédicats

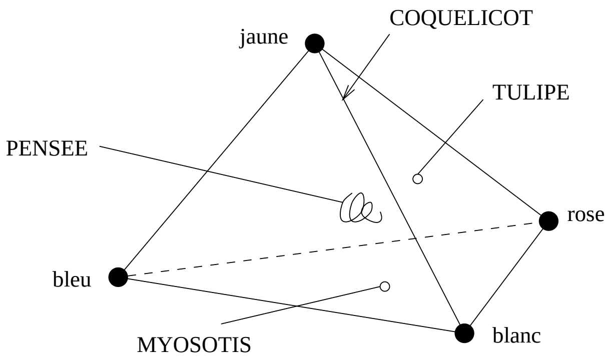


FIG. 5 – *Complexe associé à $\lambda^{-1} \subset (Couleurs \times Fleurs)$. Les sommets sont en minuscules et sont des éléments de l'ensemble C des couleurs. Le 3-simplexe représentant l'élément pensee de F, contient tous les autres, il est désigné par une flèche en « ressort » .*

et l'ensemble A d'objets. Il est possible de représenter la valeur de ces prédicats sur l'ensemble des objets par un complexe en considérant la relation binaire $\mu \in A \times P$ telle que l'élément de matrice $\mu(a_i, p_j) = 1$ si le prédicat p_j est vrai pour a_i.

Prenons par exemple :

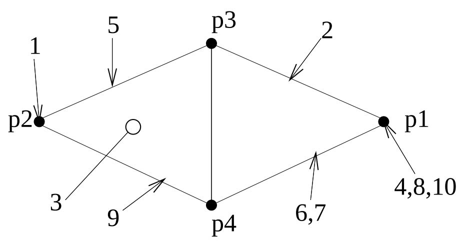
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$P = \{\text{pair, impair, premier, multiple de } 3\}$$

la matrice d'incidence de μ est alors celle de la figure 6 et la représentation simpliciale en prenant les prédicats comme sommets est donnée par la figure 6b. Les nombres $4, 8, 10$ sont représentés comme équivalents car aucun prédicat ne permet de les discerner.

En effet, avec une représentation simpliciale, deux éléments ayant les mêmes propriétés (selon les prédicats de l'ensemble P) sont représentés comme équivalents. De même, deux prédicats ne sont représentés comme différents que s'il existe un objet du monde (de l'ensemble A) sur lequel leurs valeurs diffèrent. Cette propriété est *l'égalité des indiscernables*.

	p_1	p_2	p_3	p_4
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	0	1	1	0
6	1	0	0	1
7	0	1	1	0
8	1	0	0	0
9	0	1	0	1
10	1	0	0	0

(a) Matrice d'incidence de μ



(b) Complexe dual associé à μ

FIG. 6 – *Exemple de représentation simpliciale d'un ensemble de prédicats sur un ensemble d'objets.*

Cet exemple [Val97] était involontairement proche d'un exemple cité par P. Burmeister dans [Bur], à propos de l'analyse des *Formal Comcepts* [Wil97]. Cependant, il est très intéressant de pouvoir comparer les deux. En effet la technique proposée par Atkin est elle-aussi assez proche de celle utilisée dans les Formal Concepts (en abrégé FCA). De plus, le but de ce deuxième formalisme est également de pouvoir *visualiser* des données sur des *réseaux* de concepts [Bur].

Dans la théorie FCA, on commence également par considérer des relations binaires entre objets et ensembles d'attributs que l'on peut comparer à nos *prédicats*. Dans l'exemple qu'ils donnent, ils considèrent les objets :

$$O = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

et les attributs-propriétés :

$$A = \{\text{pair}, \text{impair}, \text{premier}, \text{est-un-carré}, \text{est-un-cube}\}$$

Leur travail est d'abord effectué directement sur la matrice d'incidence avant de passer à une représentation sous forme de diagramme de Hasse.

Notons que les complexes simplicaux peuvent s'exprimer eux-aussi sous forme de diagrammes de Hasse mais avec perte d'evidence spatiale. En effet, il est possible de représenter une relation d'ordre partiel sur les éléments d'un ensemble, par un graphe prenant pour sommets, les éléments de l'ensemble. Cependant, ce graphe peut être vite illisible, du fait du grand nombre d'arêtes.

Une solution pour améliorer la lisibilité du graphe, consiste alors à ne pas mentionner les arêtes redondantes. En effet, une relation d'ordre partiel vérifie les propriétés de transitivité, antisymmétrie et réflexivité, ainsi pour $a \in E, b \in E, c \in E$, alors $a < b, b < c \Rightarrow a < c$. Il est donc inutile de faire figurer les trois arcs (a, c), (a, b) et (b, c), sur le graphe puisque l'arc (a, c) peut être déduit des autres. Un graphe sur lequel les arcs (a, c) sont économisés, s'appelle un *diagramme de Hasse*, ou diagramme transitif.

Les complexes possèdent cette propriété de transitivité, puisqu'un complexe qui est contenu dans un deuxième, lui-même contenu dans un troisième, est forcément contenu dans ce troisième. En fait, on peut associer de manière canonique un treillis à un complexe : les éléments du treillis sont les simplexes ordonnés par inclusion.

Revenons maintenant à l'exemple de Burmeister. Les deux étapes principales effectuées sur les matrices avant de passer à un diagramme de Hasse, sont celles de :

- Enlever les doublons : cette oprération s'appelle *purifier* la matrice, on enlève tous les objets qui sont reliés exactement aux mêmes propriétés pour n'en laisser qu'un seul représentant. Cette propriété est *l'égalité des indiscernables*, naturelle et automatique lorqu'on passe à ue reprśentation en CS.
- Enlever les objets-propriétés : c'est l'étape de *réduction* qui consiste à enlever les objets qui ne sont reliés qu'à une seule propriétés. Cette opération est immédiate lorsqu'on passe en représentation avec de CS, puisque dans ce cas l'objet considéré est identique au 0-simplexe auquel il est relié.

Dans CAT, ces deux opérations ne sont pas des opérations mais des conséquences de la spacialité de la représentation. Les indiscernables se "retrouvent" au même endroit, ainsi que les objets-propriétés.

3 CAT pour la représentation spatiale de connaissances

Après avoir présenté les outils de représentation des connaissances que nous allons étudier, intéressons-nous à toutes les questions naturelles que nous nous posons à propos d'un tel système :

- Comment construire une RK dans CAT ?
- Qu'est-ce qu'un concept dans CAT ?
- Quel type d'information peut-on y lire ?
- Comment représenter les hiérarchies ?
- Comment traiter les exceptions ?
- Comment ajouter de nouvelles connaissances ?
- Quelle évaluation en donner ? (expressivité, naturalité, abstraction, granulartié)

3.1 Construction d'une représentation dans CAT

Plusieurs auteurs ont étudié le passage entre l'« environnement » et la construction d'une représentation. Le morphisme reliant un modèle avec le monde représenté dépend du « processus même d'ordonancement du monde : la catégorisation » [GI92]. Il existe plusieurs approches de l'activité de catégorisation, Holland [HHNT86] propose un modèle basé sur des fonctions de catégorisation réalisant des classes d'équivalence sur les stimuli, cette proposition est illustrée par la figure 7.

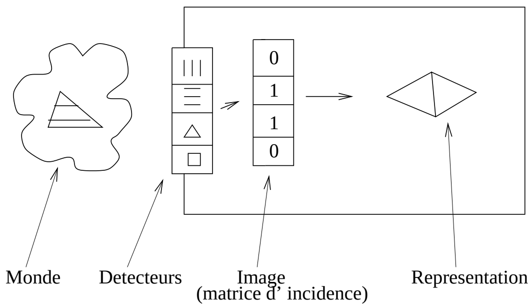


FIG. 7 – *Correspondance entre un état du monde et une représentation : les détecteurs s'allument selon les propriétés des objets observés.*

Dans ce modèle[VG98c], les détecteurs sont des prédicats pouvant prendre les valeurs 0 ou 1 selon que les objets à détecter allument le détecteur ou non. Ces détecteurs $d_1, ..., d_n$ codent les états du monde à l'aide d'une fonction de catégorisation C qui partitionne les états du système et divise le monde en classes d'équivalence [7]. La fonction C traite donc les objets qui ne sont pas discernables grâce à ces détecteurs comme équivalents : il y a *égalité des indiscernables.*

À l'issue de l'encodage de Holland, il est aisé d'extraire une représentation simpliciale. Considérons le vecteur d'états des détecteurs associé à la perception d'un objet, comme une ligne de la matrice décrivant la relation binaire qui existe entre les objets du monde et les détecteurs. Chaque objet est alors un simplexe, et un état du système, un complexe.

3.2 Parties connectées d'un CS

Un complexe simplicial est un ensemble de simplexes dont les intersections sont des simplexes. Mais tous les simplexes ne sont pas obligatoirement connectés entre eux [8]. Ceux qui sont connectés partagent des simplexes de dimensions variables, ils seront donc plus ou moins "fortement" connectés. De plus, deux simplexes donnés ne sont pas forcément immédiatement en contact entre eux, mais il se peut qu'ils soient en "contact" par l'intermédiaire d'autres simplexes. Ces intermédiaires peuvent être plus ou moins nombreux. Ces descriptions intuitives sont formalisées à l'aide de la notion de chemin polygonal.

Definition 3 (chemin polygonal) *Une suite finie $\alpha = (s_0, ..., s_n)$ de simplexes d'un complexe K s'appelle chemin polygonal d'origine s_0 et d'extrémité s_n si pour tout couple de simplexes consécutifs (s_i, s_{i+1}), $s_i \cap s_{i+1} \neq \emptyset$. La dimension du chemin α est la dimension du plus petit des simplexes s_i plus un. Si $P_0 = P_n$, on dit que α est une chaîne polygonale fermée, elle définit un lacet sur $\mid K \mid$, de point-base P_0. Remarquons que les sommets d'une chaîne polygonale peuvent se retrouver plusieurs fois dans α.*

L'étude de toutes les parties connectées d'un CS représentant une relation binaire, constitue le centre de la *Q-Analyse* [Atk77].

7. Un modèle basé sur une telle catégorisation met en correspondance plusieurs objets avec une représentation, c'est un homomorphisme [HHNT86].

8. C'est à dire qu'ils ne partagent pas tous une face.

Considérons deux simplexes σ_1 et σ_2 d'un complexe simplicial K. Nous venons de voir que σ_1 et σ_2 sont connectés par une chaîne, s'il existe une séquence finie de simplexes :

$$\{\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}, ..., \sigma_{a_3}\}$$

tels que :

$$\begin{array}{ll} (1) & \sigma_{a_1} \leq \sigma_1 \\ (2) & \sigma_{a_n} \leq \sigma_2 \\ (3) & \sigma_{a_i} \quad \text{et} \quad \sigma_{a_{i+1}} \text{ partagent une face.} \end{array}$$

Nous parlons en Q-analyse d'une *chaîne de q-connectivité*, avec q, le plus petit des entiers a_i. ainsi, un n-simplexe est n-connecté à lui-même par une chaîne de longueur 0, et ne peut être $(n+1)$-connecté à aucun simplexe. Prenons un exemple concret et considérons les deux simplexes :

$$Y_1 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$$

et

$$Y_2 = \langle x_2, x_4, x_5 \rangle$$

Ces deux simplexes sont 1-connectés par le 1-simplexe $\langle x_2, x_4 \rangle$ (voir figure 8).

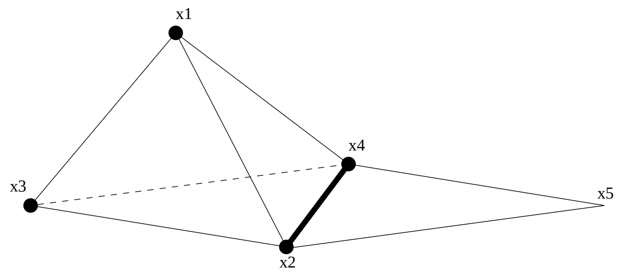


FIG. 8 – *Un 3-simplexe et un 2-simplexe, 1-connectés le long du 1-simplexe $\langle x_2, x_4 \rangle$. Le 3-simplexe $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, est en trois dimensions, l'arête en pointillés est en arrière par rapport au plan du 2-simplexe, pour figurer l'idée de volume*

Pour chacun des simplexes d'un complexe K donné, nous pouvons distinguer deux valeurs particulières de q-connectivité :

– la valeur q_{min} la plus petite de connectivité du simplexe à un autre simplexe dans K ;

– la valeur q_{max} la plus grande, qui est bornée par la dimension du simplexe lui-même.

A partir de la notion de q-connectivité, nous pouvons mesurer l'*excentricité* ϵ [Atk77] :

$$\epsilon(\sigma_p) = \frac{q_{max}(\sigma_p) - q_{min}(\sigma_p)}{q_{min}(\sigma_p) + 1}$$

Cette mesure est infinie lorsque σ_p est totalement déconnecté du reste du complexe.

Le fait de *lire* ces zones connectées entre elles par plus ou moins de longueur de chaîne, plus ou moins dimensionnée, a une correspondance en termes de représentation des connaissances, et va nous permettre de représenter des concepts de manière suffisament naturelle, expressive et souple.

3.3 Représenter un concept

Reprenons l'exemple des fleurs donné plus haut, et regardons encore la frontière mise en valeur sur la figure 5. On pourrait l'interpréter, par exemple, comme le domaine commun d'extension du rose et du jaune parmi les fleurs de la nature. Dans cet exemple, cette frontière existe d'elle-même, et correspond à un concept que nous n'avions jamais eu besoin de nommer par ailleurs. Cependant, ce type de frontière peut tout aussi bien correspondre à une sous-catégorie qui a déjà reçu un nom, si nous en avions eu l'utilité.

Prenons un deuxième exemple pour illustrer cette remarque. Soit A, l'ensemble des animaux suivants :

$$A = \{\text{chameau}, \text{lézard}, \text{tigre}, \text{araignée}, \text{faisan}, \text{mésange}\}$$

et soit N, l'ensemble possible de leurs nutriments :

$$N = \{\text{eau}, \text{plante-verte}, \text{fruit}, \text{insecte}, \text{viande}\}$$

Considérons la relation :

un animal est relié à un nutriment, si ce nutriment fait partie de son régime alimentaire habituel.

Nous pouvons alors procéder à la même analyse qu'avec les fleurs, ce qui nous mène à construire un complexe composé de simplexes. Chaque simplexe représente un animal, s'appuyant sur les sommets représentant ce dont il se nourrit. Ainsi, tous les animaux « buveurs d'eau » auront un sommet $\langle \text{eau} \rangle$ commun. Tous les carnivores auront l'arête $\langle \text{eau}, \text{viande} \rangle$ en commun, les « herbivores » auront peut être l'arête $\langle \text{eau}, \text{plante-verte} \rangle$ en commun, et ainsi de suite. Nous notons que la plupart de ces frontières portent déjà un nom précis (herbivores, carnivores, ...) car elles désignent des familles d'animaux classiques.

Ce type de représentation nous permet une *auto-organisation* des objets en concepts à partir de leur propriétés. Les concepts ne possèdent alors plus de bords déterminés et *fixes*. Cette auto-organisation mène aussi à la *découverte* de concepts sous-jascents.

Les parties q-connectées d'un complexe sont les parties qui ont des bords en commun, ces bords peuvent être interprétés comme des frontières entre concepts dans une représentation simpliciale. Les concepts sont alors représentés par ce qu'ils ont de *commun* et de *différent* avec les autres.

Selon que nous considérons une représentation en fonction des propriétés ou bien la représentations duale en fonction des objets, nous allons pouvoir définir les concepts en *extension* ou en *intension*.

En effet, un concept est défini en *extension* si l'on énumère l'ensemble des *objets* qui sont des exemples connus représentant (ou inclus dans) ce concept. C'est ce qui est visible dans l'exemple fleurs lorsque l'on représente les fleurs comme des sommets et les prorpiétés de couleur comme des simplexes construits dessus. La propriété "jaune" est un simplexe contenant des *exemples* de "jaunesse".

Un concept est défini en *intension* si l'on donne les propriétés communes à tous ses membres. C'est ce qui est visible dans l'exemple des nombres lorsque les propriétés sont représentées comme des sommets et les nombres par dessus. Dans cet exemple, le simplexe $\langle 6, 7 \rangle$ contient les simplexes $\langle p_1 \rangle$ et $\langle p_4 \rangle$, il existe un concept défini comme vérifiant ces deux propriétés (et contenant aussi les nombres $4, 8, 10$ qui sont *identifiés* avec les simplexe $\langle p_1 \rangle$).

Dans le formalisme FCA [Bur], les concepts sont également définis en extension par l'ensemble des objets qui appartiennent au concept et en intension par l'ensemble des attributs valides pour ces objets. Un concepts et un trio $c = (Obj, Att, Relation)$, ainsi un concepts *est*la matrice d'incidence. Cette expression des concepts est proche de la notre, mais leur représentation de ces concepts n'est pas naturelle et ne permet pas de mettre directement en avant les propriétés partagées et de comparer ces concepts entre eux, d'étudier leurs relations.

Maintenant que nous savons "regarder" les CS pour définir des concepts, comment peut-on les organiser ?

3.4 Relation d'ordre, hiérarchies

Puisque les complexes sont une généralisation des graphes à plusieurs dimensions, nous pouvons tout naturellement représenter des hiérarchies de concepts à l'aide de CS.

Plaçons nous par exemple dans le cadre des langages orientés objets en informatique. Les objets sont alors définis à avec des attributs qu'ils héritent de leurs parents, et des attributs qui leur sont propres. Une classe est alors un ensemble d'objets qui partagent un ensemble d'attributs.

La représentation d'une classe se fera tout naturellement par le biais de la représentation des attributs qui la caractérisent.

La relation d'héritage des classes est alors la relation d'inclusion des complexes. En effet, un classe A définie par un seul attribut sera identifiée à un 0-simplexe par exemple. Une classe B héritant de cette classe, mais ayant en plus un deuxième attribut contiendra sa classe mère, mais sera plus grande qu'elle de un attribut. Ainsi les classes les plus hautes dans la hiérarchie seront celles qui sont contenues par toutes les autres, celles qui se trouvent à leur intersection. Les classes les plus particularisées sont celles qui ont besoin du plus grand nombre d'attributs pour être spécifiées, elles sont donc plus vastes, car nécessitant plus d'information.

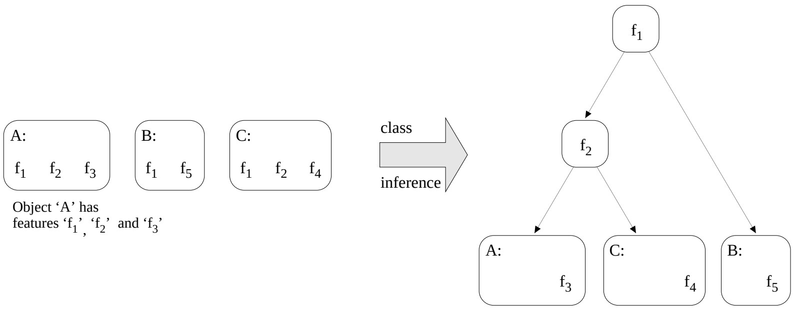


FIG. 9 – *A partir d'une collection d'objets concrets, nous inférons une structure d'héritage.*

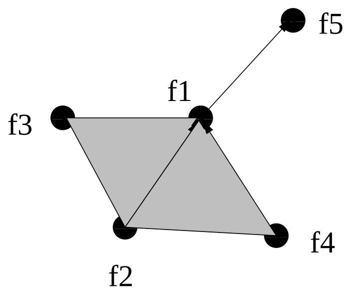


FIG. 10 – *A partir de la même collection d'objets concrets de la figure 9, nous inférons une structure d'héritage représentée avec des CS.*

Cinq critères sont suffisants pour contraindre l'obtention effective d'une hiérachie [VG98b, Moo96] :

1. Il doit y avoir un partage maximal des attributs entre les classes.
2. Un nombre minimal de simplexes sont distingués.
3. Une classe hérite du maximum de classes qu'elle contient.
4. Les objets concrets sont les simplexes maximaux de la représentation.

Nous voyons sur la figure 10, que l'attribut f_1 est partagé par toutes les classes. Il est en effet sommet su simplexe $\langle f_1, f_5\rangle$, du simplexe $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ et du simplexe $\langle f_1, f_2, f_4\rangle$, de même, $\langle f_1, f_2\rangle$ est commun ensuite à $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ et $\langle f_1, f_2, f_4\rangle$. Enfin, les classes, sont bien des simplexes maximaux qui se distinguent par au moins un attribut chacune.

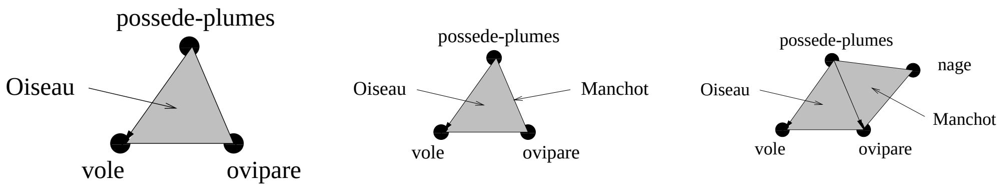
3.5 Traitement des exceptions

Le traitement des exception est un sujet qui pose souvent problème dans les systèmes de RK. En effet, soit on est obligé d'ignorer tout simplement cet aspect de la RK pour avoir une hiérarchie de classes rigoureuse, soit on est obligé de modifier la hiérarchie aux dépends de ses propriétés fondamentales d'héritage.

Ce problème vient souvent du fait qu'une classe est nécessairement nommée, étiquettée [Bra85], et que ses héritiers sont des branches qui partent de cette étiquette. Nous avons vu ici, que les concepts sont définis au choix en intension (par les attributs partagés par les exemples connus) ou en extension (par les exemples connus), sans avoir explicitement recours à un étiquettage direct de chaque concept. En effet, un étiquetage pose toujours le problème de la granularité d'un RK que nous aborderons dans la sous-section suivante.

Dans CAT, il est possible de décrire un élément en tant qu'*exception* par rapport à une classe, puisque nous le représentons par ce qu'il a des *différent* par rapport aux éléments définissant cette classe.

Par exemple, considérons la classe oiseau définie en intension par trois proprités, "poosède-plumes", "vole" et "ovipare". Cette classe est représentée sur la figure 11(a). Essayons de reprsénter l'exception "manchot" par rapport à cette classe. Il ne vérifie que les prorpiétés "possède-plumes" et "ovipare", il est donc représenté comme un 1-simplexe appartenant au simplexe "oiseau". Cela représente une sous-classe qui ne vérifie que ces deux caractères et dont la classe oiseau hérite (figure 11(b)). Cela aurait été impossible si "oiseau" était déjà une propriété atomique. Mais elle est heureusement elle-même, dans tous les cas, exprimable en fonction de propriétés plus fines (voir section 3.7).



(a) La classe "oiseau" définie en intension par trois proprités, "poosède-plumes", "vole" et "ovipare".

(b) Représentation de l'exception "manchot" par rapport à cette classe.

(c) Représentation de l'exception "manchot" par rapport à la classe "oiseau", en considérant la propriété supplémentaie "nage".

FIG. 11 – *Insertion d'une exception dans une représentation en intension d'une classe.*

La reprsźentation de l'exception sera différente de celle de tous les autres objets entrant dans la classe "oiseau". Cette différence peut même se traduire par une autre propriété en plus comme "nage" par exemple comme sur la figure 11(c). Ici l'objet "manchot" et les objets de "oiseau " partagent encore une sous-classe définie par les propriétés "oiseau" et "ovipare", mais cette sous-classe n'est pas celle à laquelle appartient "manchot". On peut alors dire qu'un manchot est une exception à la classe des oiseaux car il ne vole pas, ou bien qu'un manchot est un oiseau qui ne vole pas *et* qui nage.

3.6 Exhaustivité, plasticité

Une bonne caractéristique d'un formalisme de représentation des connaissances doit être son *exhaustivité*. C'est-à-dire qu'à chaque objet du problème traité, doit correspondre une représentation dans le modèle. Si cette exhaustivité n'est pas atteinte, comme c'est toujours le cas même dans les système cognitifs réels, on doit pouvoir ajouter des connaissances nouvelles au modèle de manière facile et consistente.

Nous avons vu que dans le cas du formalisme CAT, une connaissance nouvelle peut être représentée par rapport aux attributs (ou propriétés) de la RK en cours, s'insérer dans une classe, sans la contenir totalement. Ce nouvel exemple peut ne contenir qu'une portion de classe correspondant au nombre d'attributs réels qu'il partage avec cette classe.

Un ré-étiquetage n'est pas nécessaire et pourtant un "nouveau" concept est représenté qui est l'intersection de ce nouvel objet (exemple) avec la classe à laquelle il appratient presque. L'ancienne classe hérite de cette nouvelle classe ainsi que ce nouvel objet, la hiérarchie est réorganisée sans avoir besoin de repenser la granularité du système.

Reprenons l'exemple des hiérarchies de classes, et essayons d'ajouter la classe définie par les attributs f_1, f_3, f_6, avec les complexes simpliciaux cela donne tout simplement la figure 12

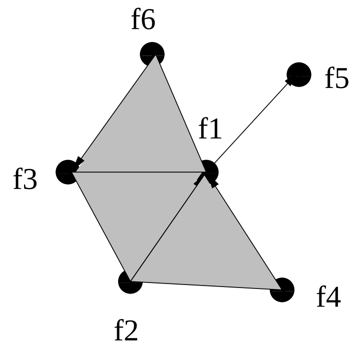


FIG. 12 – *A partir de la même collection d'objets concrets de la figure 9, plus l'élément f_1, f_3, f_6, nous inférons une structure d'héritage représentée avec des CS. Cela est simplement fait en ajoutant le sommet f_6 et en plaçant la nouveau simplexe $\langle f_1, f_3, f_6 \rangle$.*

3.7 Abstraction

La granularité de départ d'une représentation est souvent difficile à doser. En effet, trop forte, elle posera des problèmes d'éfficacité d'exécution. Notons que ces problèmes peuvent sembler sans importance pour certaines modélisations non appliquées, mais il faut tout de même ne pas dépasser une limite qui interdirait la plausibilité cognitive du modèle [9]. Tandis qu'une granularité trop faible posera à nouveau des problèmes d'expréssivité du formalime.

La granularité est pourtant aussi un problème initial dans CAT, puisqu'il faut choisir la granularité pour les propriétés qui vont nous servir de *base* pour exprimer tous les objets rencontrés.

Dans un CS, chacun des sommets peut être considéré comme étant lui-même représentable avec une granularité plus fine. En effet, cela correspond à la simple opération algébrique de changement de base. Si une granularité est jugée insuffisante à une étape de la construction de la représentation, on peut projeter toute la RK courrante selon une nouvelles base, plus fine en exprimant les anciennes propriétés en fonction des nouvelles.

Nous avons fait un tour des caractṫistiques de la reprśentation des connaissances basée sur le formalisme CAT. Nous allons voir maintenant quelles sont les opérations qui sont possibles naturellement dans CAT sur ces RK. nous verrons ensuite quels type de *raisonnements* nous pouvons avantageusement modéliser avec ce formalisme.

4 CAT pour quels raisonnements ?

Les trois opérations principales que nous ferons naturellement dans CAT sont liées à des outils de la topologie algébrique. nous pouvons :

– Comparer deux RK entre elles.

– Sélectionner une RK dans une base.

9. De plus en plus de modèles accordent de l'importance à l'aspect efficacité d'un modèle car il est lié au paramètre de temps de réponse mesurable par les psychologues. Un temps de réponse trop long suppose que le mode de résolution n'est pas le plus naturel possible. Pour rendre compte de l'adaptabilité aux problèmes et à la rapidité de résolution des systèmes cognitifs modélisés, il faut se contraindre à des modèles efficaces [VDK96]

- Transformer une RK en une autre
- ...

4.1 Comparer deux structures

L'outil qui s'intéresse à la comparaison de ces chemins est l'homotopie de chemins.

Definition 4 (Homotopie de chemins polygonaux) *Deux chemins polygonaux dans un complexe K sont dits homotopes au sens combinatoire si on peut ramener l'un à l'autre en un nombre fini d'opérations, réalisables dans les deux sens, appartenant à l'un des deux types :*

$$\begin{array}{ll} (1) & (..., P, P, ...) \leftrightarrow (..., P, ...) \\ (2) & (..., P, Q, R, ...) \leftrightarrow (..., P, R, ...) \end{array}$$

où P, Q, R sont des simplexes, et où tous les chemins sont des chemins de K.

L'homotopie des chemins polygonaux est une relation d'équivalence entre chemins fermés de même simplexe-base P_0.

4.2 Sélectionner une structure

Pour sélectionner une RK dans une base, il faut le faire selon une certaine mesure. Cette mesure doit permettre de sélectionner une meilleure comparaison, cela revient donc à se choisir une mesure de similarité.

Dans une tentative de définition de l'inférence analogique, Erica Melis [EM96], brosse un rapide tableau des différentes mesures de similarité déjà proposées pour l'analogie. Elle distingue les mesures quantitatives, des mesures qualitatives. Ces mesures reposent souvent sur le calcul d'une similarité pour chacune des composantes ou chacun des attributs décrivant un objet.

Des mesures de similarité sont calculées sur des objets décrits comme des vecteurs de valeurs.

- Si ces coordonnées sont autorisées à avoir des valeurs numériques quelconques, alors l'objet est représenté sur un espace continu dont la dimension dépend du nombre de coordonnées, le plus souvent il s'agit d'un espace euclidien.
- Si les coordonnées sont seulement binaires, alors nous aurons des tableaux binaires, dont les objets sont représentables sur des espaces discrets, en particulier des simplexes.

Dans le cas des mesure continues, on calcule une *distance* entre deux composantes de deux vecteurs, cela donne une mesure *locale*. Si l'on veut calculer une distance *globale*, il faut sommer ces distances locales, différentes solutions sont encore possibles. On trouve des calculs de distances d plus ou moins élaborés [DLPT82].Et les distances *euclidiennes* ou *quadratiques*

Si les objets ont des coordonnées ou *traits* binaires, alors la matrice représentant tous les objets du domaine et leurs traits est représentable sous forme de simplexes, ou de treillis. Dans ce cas, on peut définir des mesures tres simplistes, basées sur le nombre de traits communs :

$$sim(a, b) = 1\text{pour}(a \cap b) \neq \emptyset$$

$$sim(a, b) = 0\text{pour}(a \cap b) = \emptyset$$

On mesure alors une similarité *locale* pour les traits selon :

$$sim(a, b) = \frac{card(a \cap b)}{card(a \cup b)}$$

Puis, en analyse de données, on introduit quatre nouvelles variavles qui vont servir à décrire d'autres ressemblances :

- A : le nombre de fois où $a^i = b^i = 1$

– B : le nombre de fois où $a^i = 0$ et $b^i = 1$

– C : le nombre de fois où $a^i = 1$ et $b^i = 0$

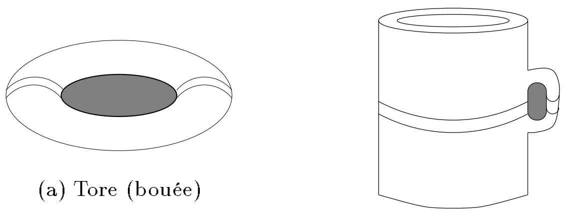
– D : le nombre de fois où $a^i = b^i = 0$

Toutes ces mesures sur les tableuax binaires reviennent à regarder les 1 et les 0 en commun ou en différence entres les objets. En termes de simplexes, cela revient à comparer les sous-simplexes de deux simplexes et détecter si il y en a en commun, combien , de quelles dimension, et combien sont en plus ou en moins et de quelles dimension. Une bonne mesure de similarité est donc de représenter la différence entre deux simplexes par le(s) simplexe(s) qui les fait différer et de même pour les complexes.

4.3 Transformer une structure

Un concept important est celui de *déformation continue* : considérons un anneau A découpé dans une feuille de caoutchouc et déformons-le mentalement. Nous pouvons le tordre, le tirer, le comprimer, toutes les déformations qui n'impliquent pas de déchirure ou de collage sont permises pour obtenir un nouvel objet B. Ces déformations préservent la structure de l'espace dans le sens où la notion de voisinage est préservée dans la transformation de A en B ; autrement dit, les voisins d'un point de A sont transformés en voisins de la transformée du point.

Par exemple, considérons une bouée, c'est à dire un tore 13(a), nous pouvons la déformer continûment en une tasse comme le montre la figure 13(b) [Got94]. En effet, le trou de la bouée est conservé puisqu'il constitue l'anse de la tasse, tout le reste étant réparti sans trou sur le reste de la tasse.



(a) Tore (bouée)

(b) Tasse

FIG. 13 – *Déformation continue en 3 dimensions d'un tore (ou bouée) en une tasse avec une seule anse*

Nous dirons que l'anneau et la poule de notre dessin sont *topologiquement équivalents*, de même pour la bouée et la tasse. Les propriétés de l'anneau disque plein qui nous intéressent ici sont qu'il est fait d'une seule pièce et qu'il possède un trou et deux bords. Un disque, par exemple, possède un seul bord et pas de trou et on peut montrer qu'on ne peut pas déformer continûment un disque en anneau ou vice-versa.

Pour déformer un simplexe en un autre, il suffit de trouver une application simpliciale entre les deux simplexes.

Si les deux simplexes sont plongés dans un complexe, cela revient à trouver un chemin polygonal qui connecte les deux simplexes. On peut alors déformer le premier simplexe le long du seonc *le long* de ce chemin polygonal.

5 Application à l'analogie : Le système ESQIMO

Les opérations que nous venons d'énumérer dans la section précédente, nous permettent déjà de nous attaquer à la modélisation d'un type de raisonnement fondamental : le raisonnement par analogies. En effet, nous aurons besoin d'une comparaison entre des RK ainsi que d'une transformation de RK comme nous le verrons dans l'algorithme qui suit.

L'analogie intervient dans deux sens en sciences cognitives. J. Savelli [Sav93] propose de les distinguer en l'*analogie statique* et l'*analogie dynamique*. L'analogie statique recourvre les tâche dans lesquelles il sufit de remarquer une analogie qui existe déjà entre deux situations, la mettre en valeur. Dans l'analogie dynamique, il s'agit de créer une situation d'analogie en trouvant (ou en sélectionnant parmi une base d'exemples) une situation source, la plus similaire possible. Cette situation source est ensuite supposée analogue à la situation cible (cette supposition reste toutefois à justifier). Dans le cadre de cette hypothèse d'analogie, il faut ensuite transférer les connaissances de la source vers la cible afin d'obtenir de nouvelles connaissances sur la cible, et résoudre ainsi un problème posé. En particulier, la grande différence entre ces deux types d'analogies, est qu'il n'y a pas besoin de base d'exemples dans l'analogie statique.

5.1 L'analogie statique

Le système ESQIMO [VGS98, VG98a], que nous présentons ici est développé en `Caml`, et résoud automatiquement des tests de QI en construisant une représentation simpliciale du problème.

5.1.1 Représentation de l'espace du problème

Les tests sont exprimés avec 12 figures géométriques de base : (voir figure 14a):

$$E = \{e_1, ..., e_{12}\}$$

qui sont décrites à l'aide de sept propriétés tirées de l'étude de Weber [WS90] :

$$P = \{p_1, ..., p_7\} = \{\text{rond, carré, triangle, blanc, noir, petit, grand}\}$$

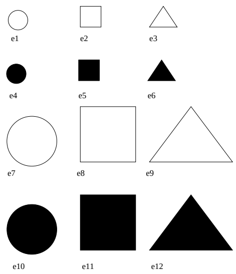
Chaque test consiste en la donnée de *trois figures* composées de un ou plusieurs *éléments* de E. Les éléments observés sur chaque figure correspondent aux objets du monde dans le modèle de la figure 7, les prédicats correspondent aux détecteurs. Chacun des éléments de ces figures est donc perçu comme un vecteur d'états des détecteurs et ensuite représenté comme un simplexe d'après le modèle de construction précédent. Pour cela, nous considérons la relation binaire ν qui existe entre l'ensemble E et l'ensemble P. La matrice de ν sera telle que l'élément $(e_i, p_j) = 1$ si la propriété p_j est vraie pour e_i. Dans le cas de figures composées de plusieurs éléments, leur représentation sera un *multi-ensemble* de simplexes.

Afin de résoudre l'analogie, nous représentons l'espace des transformations et figures possibles par un complexe. En effet, nous considérons la même relation μ mais cette fois sur tous les éléments connus de l'univers, et nous obtenons une grande matrice, dont chaque ligne est représentée par un simplexe, et qui est toute entière représentée par un complexe $C(\Omega)$ (voir figure 14b). Chaque élément des figures du test peut alors être placé sur $C(\Omega)$.

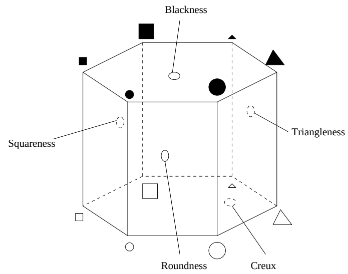
5.1.2 Algorithme simplifié

On décompose habituellement la résolution de cette analogie en quatre étapes :

- Première étape : déterminer la(les) relation(s) possible(s) entre A et B : R_{AB}.
- Deuxième étape : déterminer la(les) relation(s) possible(s) entre A et C : R_{AC}.
- Troisième étape : appliquer R_{AB} à C en se restreignant au domaine déterminé grâce à R_{AC}.
- Quatrième étape : vérifier la correspondance entre B et D par la relation R_{AC}.



(a) Éléments de l'univers de ESQIMO, appelés de haut en bas et de gauche à droite, e_1 à e_{12}.



(b) Vue 2D de $C(\Omega)$.

FIG. 14 – *Éléments manipulés par ESQIMO et leur représentation simpliciale.*

Nous plaçons les simplexes S_A de A et S_B de B sur le complexe $C(\Omega)$. L'étape 1 de résolution de l'analogie revient alors à trouver une relation entre S_A et S_B, c'est-à-dire un moyen de passer de l'un à l'autre : *nous modélisons cette transformation par un chemin polygonal* de S_A à S_B dans $C(\Omega)$.

L'étape 2, consiste à trouver le domaine de S_C à déformer le long du précédent chemin pour obtenir S_D. En effet, l'application de la transformation T_{AB} à C est modélisée par la déformation de S_C le long du chemin $S_A o...o S_B$, ce qui contitue la troisième étape[10]. Le simplexe S_D est alors la représentation simpliciale de D. La quatrième étape est optionnelle.

Dans le cas de figures composées de plusieurs éléments, nous plaçons un simplexe de A avec un simplexe de B à la fois sur $C(\Omega)$ et nous cherchons des transformations élémentaires, c'est-à-dire des chemins de déformation à appliquer en parallèle (pour plus de détails voir le manuel de ESQIMO [Val98]).

5.1.3 Exemple rapide de résolution avec ESQIMO

Nous avons procédé à deux séries de tests empiriques sur 10 puis 20 sujets (pour le protocole et les analyses de résultats, voir [Val97]) afin d'étudier les différentes transformations possibles utilisées par les humains. Cela nous a permis de développer plusieurs heuristiques dans l'algorithme général d'ESQIMO, puis de tester les résultats de résolutions avec ESQIMO.

Dans le premier exemple, nous présentons les figures A, B et C de l'illustration 15, et nous attendons la réponse D correspondant au résultat empirique le plus fréquent.

(a) (b) (c) (d)

FIG. 15 – *Les figures A, B and C sont définies, et nous nous attendons à la réponse D.*

Nous définissons les trois figures sur l'interface d'ESQIMO, avec la figure A ne contienant que l'élément e_1 et ainsi de suite :

```
#let A = e1 and B = e4 and C = e2;;
```

10. Cela revient à appliquer une application *simpliciale*, mais cette notion mathématique n'est pas introduite ici.

Nous demandons le nom de l'élément solution, lors d'une résolution simple, dans l'univers `omega` (désignant $C(\Omega)$), avec les figures A, B, C définies précédemment[11] :

```
#nom_de(elements(resoud_simple omega A B C));;
- : "e5"
```

La réponse est bien e_5, qui désigne un petit carré noir (voir 14) comme attendu sur la figure 15.

Pour d'autres exemples voir [VG98a, Val98].

Différents modèles ont déjà été proposés pour la résolution d'analogies comme SME [FFG89, Gen83], ANALOGY [Eva68, Ha91], ARCS [THNG90]. Notre principal apport dans ce domaine réside dans l'exploration d'une résolution de type diagrammatique et surtout dans la proposition d'un nouveau système de représentation des connaissances basé sur la topologie algébrique. Les résultats fournis par ESQIMO sont satisfaisants par rapport aux données empiriques et surtout en considérant la simplicité du modèle. Nous travaillons sur la résolution d'analogies plus complexes et sur l'expression de propriétés relatives pour la description des figures des tests.

5.1.4 Efficacité

Du point de vue de l'efficacité, interessons-nous au coeur de l'algorithme de ESQIMO : la recherche du plus court chemin de dimension maximale entre deux simplexes plongés dans un CS.

Rechercher un chemin de connexité de dimension q entre deux simplexes revient à rechercher de proche en proche des simplexes voisins aux simplexes des extrémités. Cela revient à utiliser la matrice d'incidence de la relation $\lambda \subset A \times B$ et à rechercher les lignes qui ont en commun au moins q éléments 1 (ce qui nous ramène à nos mesures de similarité binaires). Pour faire cela, il suffit de calculer le produit ${}^tM.M - 1$ où M est la matrice d'incidence et ${}^tM$ sa transposée.

La matrice résultant indique le nombre d'́eléments partagés par deux simplexes, seulement si ce nombre est positif. Si ce nombre est négatif, alors il n'y a pas d'éléments partagés.

Cela permet de trouver les classes d'équivalence de la relation “être q-connecté”, en fixant le seuil q voulu à la lecture. Ainsi on peut trouver les chemins de plus grande dimension reliant deux simplexes dans un complexe, c'est-à-dire dans une matrice.

Cette recherche est bornée à $\circ(p^3)$ où $p = max(Card(A), Card(B))$.

5.2 L'analogie dynamique : ESQIMO-BASE

Dans ce traitement de l'analogie, onconsidère une base d'exemples BASE de couples $A - B$, et on propose une cible $C-?$ à résoudre. L'algorithme d'ESQIMO devient alors :

- Recherche dans la base BASE d'un couple exemples $A - B$, grâce à la mesure de similarité introduite précédement. Si plusieurs sont sélectionnés, alors recherche en parallèle de plusieurs solutions.
- Algorithme *local* de résolution statique ESQIMO
- Stockage dans la base BASE du nouvel exemple $C - D$ où D est la solution proposée.

Les problèmes principaux posés par cette approche sont ceux du stockage des couples dans la base BASE. Nous voulons les stocker eux-aussi sous forme simpliciale par ce qu'ils ont de commun et de différent avec les autres couples. Ce stockage doit surtout remplir des conditions d'éfficacité. Ainsi un couple n'est stocké que s'il apporte un einformation pertinente et supplémentaire à la base BASE.

11. Pour une explication sur l'utilisation des fonctions `resoud_simple`, `nom_de`. etc, voir le manuel [Val98]. ESQIMO se présente comme une bibliothèque de fonctions `Caml` que l'on appelle interactivement à la console.

6 Conclusions

Le formalisme CAT semble suffisament riche pour prétendre supporter une représentation spatiale des connaissances. Nous l'avons choisi pour des raisons de naturalité et d'expressivité, et nous l'avons étudié pour tester ses autres propriétés. Il semble se comporter de façon prometteuse pour la représentation des hiérarchies, le traitement des exception, l'ajout de connaissances nouvelles, qui peuvent intervenir dans des applications basées sur l'apprentissage ou la catégorisation.

En ce qui concerne le modèle de construction de représentations simpliciales, nous soulignons les propriétés communes entre le modèle de Holland [HHNT86] et les complexes simpliciaux qui nous permettent de construire des représentations qui nous semblent naturelles et adaptées à l'expression et à l'utilisation de relations spatiales.

ESQIMO n'est donc qu'un exemple d'application de certains outils de la topologie algébrique à des RK construites dans le cadre CAT. Nous développons actuellement ESQIMO-BASE qui permettra de se pencher sur des problèmes de reformulation des RK. La reformulation est un aspect souvent critiqué des systèmes modélisant l'analogie, puisqu'ils sont coupables de donner les connaissances sous une forme pré-mâchée à leur système, contenant déjà la solution. En sachant que toute la connaissance est obligatoirement dans la RK à l'origine, et sans débattre sur cet aspect, notons que dans le cadre de CAT, une reformulation n'est pas un problème puisqu'il suffit de se servir des chagements de base et de granularité pour adapter une RK avant son traitement ultérieur.

Références

[Atk76] Atkin & al. Fred CHAMP positional chess analyst. *International Journal of Man-Machine Studies*, 8:517–529, 1976.

[Atk77] R. H. Atkin. *Combinatorial Connectivities in Social Systems.* Verlag, 1977.

[Atk81] R. H. Atkin. *Multidimensional Man.* Penguin, 1981.

[Bra85] Ronald J. Brachman. "i lied about the trees" : Or, defaults and definitions in knowledge representation. *The AI Magazine*, 6:80–93, 1985.

[Bur] Peter Burmeister. Formal concept analysis with comimp : Introduction to the basic features. Found on the ComImp Web Site.

[Cas92] John Casti. *Reality Rules: Picturing the world in mathematics. II — The Frontiers.* Wiley, 1992.

[Cas94] J. L. Casti. *Complexification.* Harper Perennial, 1 edition, 1994.

[DLPT82] E. Diday, J. Lemaire, J. Pouget, and F. Testu. *Éléments d'analyse de données.* Bordas, 1982.

[Dor86] P. Doreian. Analysing overlaps in food webs. *J. Soc. & Biol. Structures*, 9:115–139, 1986.

[Elt94] H. Elter. *Etude de structures combinatoires pour la représentation de complexes cellulaires.* Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur de Strasbourg, Septembre 1994.

[EM96] Manuela Veloso Erica Melis. *Handbook of Practical Logic*, chapter Analogy in Problem Solving. Springer-Verlag ??, 1996.

[Eva68] Thomas G. Evans. A program for the solution of a class of geometric analogy intelligence-test questions. In *Semantic Information Processing*, chapter 5, pages 271–353. The MIT Press, 1968.

[FFG89] Brian Falkenhainer, Kenneth D. Forbus, and Dedre Gentner. The structure-mapping engine. *Artificial Intelligence*, 41(1):1–63, November 1989.

[Gen83] Dedre Gentner. Structure-mapping a theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2):155–170, April-June 1983.

[GI92] M.-D. Gineste and B. Indurkhya. Modèles mentaux, analogie et cognition. In *Les modèles mentaux, approche cognitive des représentations*, chapter 6, pages 143–170. masson, Paris, 1992.

[Got94] N. M. Gotts. How far can we 'C'? defining a 'doughnut' using connection alone. In Pietro Torasso Jon Doyle, Erik Sandewall, editor, *Proceedings of the 4th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 246–257, Bonn, FRG, May 1994. Morgan Kaufmann.

[Gou80] P. Gould. Q-analysis, or a language of structure : An introduction for social scientists, geographers and planners. *International Journal of Man-Machine Studies*, 13:169–199, 1980.

[GV98] Jean-Louis Giavitto and Erika Valencia. Combinatorial algebraic topology for dagrammatic reasoning. Technical Report 1165, LRI, ura 410, april 1998.

[Ha91] J. P. Haton and al. *Le raisonnement en intelligence artificielle*. InterEditions, 1991.

[HE97] Christopher Habel and Carola Eschenbach. Abstract structures in spatial cognition. In Christian Freska, Matthias Jantzen, and RÜdiger Valk, editors, *Foundations of Computer Science*, volume 1337 of *LNCS*. Springer-Verlag, 1997.

[HHNT86] John H. Holland, Keith J. Holyoak, Richard E. Nisbett, and Paul R. Thagard. *Induction – Processes of Inference, learning, and Discovery*. The MIT Press, 1986.

[JL92] N. Johnson-Laird. La théorie des modèles mentaux. In *Les modèles mentaux, approche cognitive des représentations*, chapter Introduction, pages 1–21. masson, Paris, 1992.

[Joh91] J. Johnson. *The mathematical revolution inspired by computing*, chapter The mathematics of complex systems, Johnson J. and Loomes M. eds., pages 165–186. Oxford University Press, 1991.

[Lug98] Luger. *Artificial Intelligence*. Addison-Wesley, 1998.

[Moo96] Ivan Moore. A simple and efficient algorithm for onferring inheritance hierarchies. In *TOOLS 96*. TOOLS Europe, Prentice-Hall, 1996.

[PLC91] J. Pimm, J. Lawton, and J. Cohen. Food web patterns and their consequence. *Nature*, 350:669–674, 25 April 1991.

[Sav93] Joël Savelli. *Aspects statique et dynamique de la notion d'analogie: Relation d'analogie et processus analogique*. PhD thesis, ANRT Grenoble, 1993.

[THNG90] P. Thagard, K. J. Holyak, G. Nelson, and D. Gochfeld. Analog retrieval by constraint satisfaction. *Artificial Intelligence*, 46(3):259–310, December 1990.

[Val97] Erika Valencia. Un modèle topologique pour le raisonnement diagrammatique. Rapport pour le DEA Sciences Cognitives, LIMSI. See also `http://www.lri.fr/~erika/`, August 1997.

[Val98] Erika Valencia. Hitch hiker's guide to esqimo. RR 1173, LRI, ura 410 CNRS, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France, May 1998.

[VDK96] Tony Veale, Diarmuid O Donoghue, and Mark Keane. Computability as a limiting cognitive constraint: Complexity concerns in metaphor comprehension about which cognitive linguists should be aware. On the Metaphor Web Sit, Dublin City University, to be published in Cognitive Linguistics, 1996.

[VG98a] Erika Valencia and Jean-Louis Giavitto. Algebraic topology for knowledge representation in analogy solving. In ECCAI, editor, *European Conference on Artificial Intelligence (ECAI98)*, pages 88–92, Brighton, UK, 23–28 August 1998. Christian Rauscher.

[VG98b] Erika Valencia and Jean-Louis Giavitto. Modeling diagrammatic reasoning tasks with a topological framework. In *TwD98 Workshop*, dic 1998.

[VG98c] Erika Valencia and Jean-Louis Giavitto. Topologie algébrique pour la construction de représentations diagrammatiques. In Paris 8, editor, *7ème Colloque de l'Association pour la Recherche Cognitive*, Paris, France, dic 1998. ARC.

[VGS98] Erika Valencia, Jean-Louis Giavitto, and Jean-Paul Sansonnet. Esqimo: Modelling analogy with topology. In Franck Ritter and Richard Young, editors, *Second European Conference on Cognitive Modelling (ECCM2)*, pages 212–213, Nottingham, UK, 1–4 April 1998. Nottingham University Press.

[Wil97] Rudolf Wille. Conceptual graphs and formal concept analysis. In D. Lukose, H. Delugach, M. Keeler, L. Searle, and J. F. Sowa, editors, *Conceptual structures: Fulfilling Peirce's dream*, number 1257 in Lecture Notes in Artificial Intelligence, Berlin–Heidelberg–New York, 1997. Springer–Verlag.

[WS90] S. H. Weber and A. Stolcke. l_0 : A testbed for miniature language acquisition. *International Computer Science Institute*, 1990.